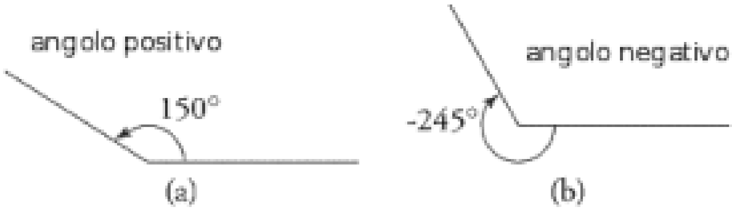
GONIOMETRIA - TRIGONOMETRIA

Esercizi discussi e svolti dal prof. Gianluigi Trivia

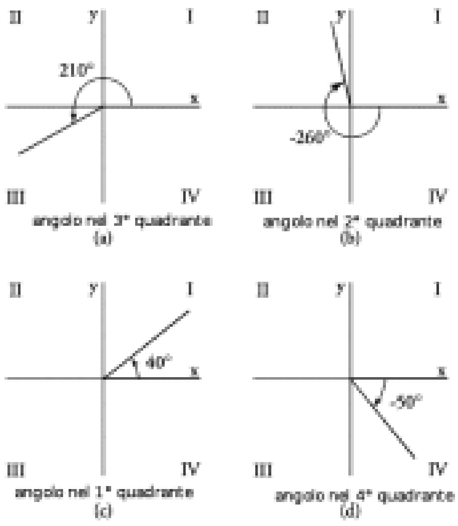
CAPITOLO 1

Archi e Angoli

Un angolo è una misura di rotazione. Gli angoli sono misurati in gradi. Una rotazione completa è misurata come 360° . La misura dell'angolo può essere positiva o negativa, a seconda del verso di rotazione. La misura dell'angolo è l'ampiezza della rotazione tra due rette formanti un angolo. La rotazione è misurata dal lato iniziale al lato finale dell'angolo. Angoli positivi risultano da una rotazione antioraria, e angoli negativi da una rotazione oraria.



Tipi di angoli



Esempio 1. Gli angoli seguenti terminano nei quadranti indicati

94°	2° quadrante
500°	2° quadrante
$-100°$	3° quadrante
320°	4° quadrante
$-300°$	1° quadrante

1.1. Gradi sessagesimali

La misura dell'ampiezza di un angolo è ottenuta solitamente ponendo l'ampiezza di un angolo giro uguale a 360°, e quindi l'unità, $1\,grado$, è la $360-esima$ parte dell'angolo giro. I sottomultipli del grado sono presi secondo il sistema di numerazione sessagesimale, cioè $1^\circ = 60^{'}$ e $1^{'} = 60^{''}$ e quindi $1^\circ = 3600^{''}$. Al di sotto del secondo di grado si ritorna all'uso dei centesimi di secondo di grado, ripristinando il sistema decimale; non ci sono multipli che rappresentano una particolare unità di misura.

1.2. Angoli radianti

Oltre questa unità, si introduce il radiante, che fa riferimento ad una circonferenza qualsiasi ed è l'angolo con vertice nel centro della circonferenza e tale che l'arco che lo sottende abbia lunghezza uguale al raggio.

Definizione: La misura di un angolo α, espressa in radianti, è il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza, che lo sottende, e il raggio; in formule

$$\alpha = \frac{lunghezza\,arco}{raggio} = \frac{l}{r}$$

La misura in radianti è pertanto indipendente dalla circonferenza, poiché, considerando un'altra circonferenza di raggio maggiore, anche la lunghezza della sua corda crescerà secondo una proporzionalità diretta. (ricordiamo che la lunghezza di un arco sta all'intera circonferenza come l'angolo giro sta all'angolo al centro sotteso dalla corda stessa).

1.3. Formule di trasformazione

Se vengono introdotte due diverse unità di misura, lo stesso angolo sarà espresso nei due casi mediante due numeri diversi; di norma, data la misura in una unità, è possibile ricavare il valore espresso nell'altra unità di misura. Il criterio seguito è quello della proporzionalità. Cioè l'angolo giro in gradi sessagesimali è pari a $360°$; lo stesso angolo giro, espresso in radianti, vale 2π, cioè il numero di volte in cui il raggio è contenuto nella circonferenza (si ricordi la definizione di radiante). Quindi

$$\alpha^\circ : \alpha^r = 360^\circ : 2\pi$$

da cui

$$\alpha^r = \alpha^\circ \cdot \frac{2\pi}{360} = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180}$$

o anche

$$\alpha^\circ = \alpha^r \cdot \frac{180}{\pi}$$

1.4. Esercizi

Esercizio 2. Trasformare in frazione di grado i seguenti angoli:

- $15^\circ\, 30^{'} = 15^\circ + \frac{30}{60} = 15.5^\circ$
- $2^\circ\, 12^{''} = 2^\circ + \frac{12}{3600} = 2^\circ + \frac{1}{300} = \left(\frac{601}{300}\right)^\circ = 2,003^\circ$
- $3^\circ\, 1^{'}\, 10^{''} = 3^\circ + \frac{1}{60} + \frac{10}{3600} = \frac{1087}{360} = 3.019^\circ$

Esercizio 3. Trasformare in gradi, primi, secondi le seguenti funzioni di grado:

- $\left(\frac{1201}{300}\right)^\circ = 4^\circ + \frac{1}{300} = 4^\circ + \frac{12}{3600} = 4^\circ\, 12^{''}$
- $\left(\frac{3241}{720}\right)^\circ = 4^\circ + \frac{361}{720} = 4 + \frac{1805}{3600} = 4^\circ + \frac{1800}{3600} + \frac{5}{3600} = 4^\circ + \frac{30}{60} + \frac{5}{3600} = 4^\circ\, 30^{'}\, 5^{''}$

Questi calcoli possono essere svolti facilmente utilizzando una calcolatrice:

- $\left(\frac{1201}{300}\right)^\circ = 1201 : 300 = 4.00333333$; sottraiamo la parte intera: $Ans - 4 = 0.003333333$; moltiplichiamo per 60 per ottenere il numero dei primi: $Ans \cdot 60 = 0.2$; essendo minore dell'unità avremo $0^{'}$; moltiplichiamo poi per 60 per avere i secondi: $Ans \times 60 = 12^{''}$
- $\left(\frac{3241}{720}\right)^\circ = 3241 : 720 = 4.501388888$, avremo 4°; poi $(Ans - 4) \cdot 60 = 30.0833333$, avremo $30^{'}$; poi $(Ans - 30) \cdot 60 = 5^{''}$

A dire il vero, le calcolatrici offrono la possibilità di eseguire tali trasformazioni con maggiore rapidità, ma non mi soffermo su ciò, non potendo qui presentare le modalità per ogni marca di calcolatrice.

Esercizio 4. Trasformare in radianti le seguenti misure espresse in gradi:

- 12°: basta applicare la formula di conversione.

$$12^\circ \cdot \frac{\pi^r}{180^\circ} = \frac{1}{15}\pi = 0.2094^r$$

- $5^\circ\, 30^{'}\, 15^{''}$: trasformiamo prima in frazione di grado e poi in radianti:
$$5+\frac{30}{60}+\frac{15}{3600}=\frac{1321}{240}^\circ$$
per cui
$$\frac{1321}{240}^\circ\cdot\frac{\pi^r}{180^\circ}=\frac{1321}{43200}\pi=0.0306^r$$

Esercizio 5. Trasformare in gradi le seguenti misure espresse in radianti:

- $\frac{3}{4}\pi$: applichiamo la formula di trasformazione
$$\frac{3}{4}\pi\cdot\frac{180}{\pi}=135^\circ$$
- $\frac{11}{4}\pi$: come prima
$$\frac{11}{4}\pi\cdot\frac{180}{\pi}=495^\circ$$
- $2,5467^r$: anche in questo caso, basta applicare la formula di trasformazione, sostituendo a π il suo valore numerico, ovviamente approssimato
$$2,5467^r\cdot\frac{180}{\pi}=146,73^\circ=146^\circ\, 43^{'}\, 33^{''}$$

1.4.1. Applichiamo ora la definizione di radiante.

Esercizio 6. Determinare la misura l dell'arco, noti l'angolo al centro e il raggio:

- $\alpha=\frac{\pi}{12}$ e $r=6$. Ricordando la definizione di radiante $\alpha^r=\frac{l}{r}$, si ha
$$l=\alpha r=\frac{\pi}{12}\cdot 6=\frac{\pi}{2}=1,5708$$

Esercizio 7. Dati la misura del raggio, dell'angolo al centro, trovare la lunghezza dell'arco sotteso e l'area del settore circolare:

- $\alpha=\frac{3}{7}\pi$ e $r=14$: dalla definizione di angolo radiante si ha
$$l=\alpha r=\frac{3}{7}\pi\cdot 14=6\pi=18.85$$
mentre l'area del settore circolare sta con l'area del cerchio come l'angolo al centro sta all'angolo giro:
$$A_{settore}:\pi r^2=\alpha:2\pi$$
da cui
$$A_{settore}=\frac{\frac{3}{7}\pi\cdot 14^2\pi}{2\pi}=\frac{3}{14}\cdot 14^2\pi=42\pi=131.9$$

Esercizio 8. Sia dato un angolo al centro β sotteso da un arco lungo $10\,cm$ in un cerchio di raggio $4\,cm$. Trovare l'area del settore circolare sotteso dall'arco assegnato.

Soluzione. Troviamo l'angolo al centro in radianti, mediante la relazione
$$\beta=\frac{l_{arco}}{r_{aggio}}=\frac{10\,cm}{4\,cm}=2,5\,rad$$
L'area di un settore circolare si può ottenere mediante la proporzione
$$A_{cerchio}:A_{set}=2\pi:\beta$$
da cui
$$A_{set}=\frac{\pi r^2\beta}{2\pi}=\frac{1}{2}r^2\beta_{rad}$$
per cui $A=\frac{1}{2}\times 16\times 2,5=20\,cm^2$

Esercizio 9. Un esagono è inscritto in un cerchio. Se la differenza tra l'area del cerchio e l'area dell'esagono è $24\,m^2$, usare la formula dell'area di un settore per approssimare il raggio del cerchio.

Soluzione. L'esagono è formato da sei triangoli equilateri aventi come lato il raggio del cerchio. Pertanto, l'area dell'esagono in funzione del raggio è data da

$$6 \cdot r \cdot \frac{r}{4}\sqrt{3}$$

(dove $\frac{r}{2}\sqrt{3}$ è l'altezza del triangolo equilatero, o la cosiddetta apotema). La differenza tra le due aree è data da

$$\pi r^2 - \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3} = 24$$

da cui

$$r = \sqrt{\frac{24}{\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}}} \simeq 6,6\,m$$

Esercizio 10. La Terra ruota attorno al proprio asse in $23^h 56^m 4^s$. Approssima il numero di radianti ruotati dalla Terra in un secondo.

Soluzione. In un giorno si hanno

$$23 \times 3600 + 56 \times 60 + 4 = 86164\,s$$

in questo intervallo di tempo la Terra compie una rotazione pari a 2π radianti ($360°$); pertanto in un secondo

$$\beta = \frac{2\pi}{86164} \simeq 7,3 \cdot 10^{-5}\,rad$$

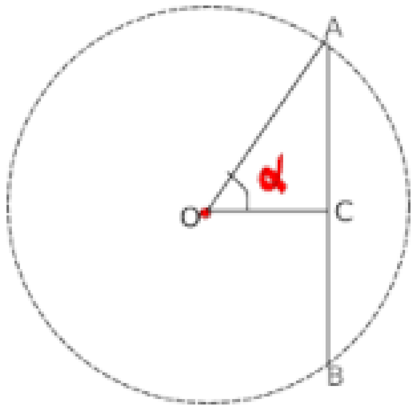
CAPITOLO 2

Funzioni Goniometriche

2.1. Cenni storici

Il fondatore della trigonometria è Ipparco, che visse a Rodi e ad Alessandria e morì intorno al 125 a.C. Il metodo usato da Ipparco ci è pervenuto attraverso la descrizione e l'uso fattone da Tolomeo (Ipparco e Tolomeo furono tra i più grandi astronomi del passato).

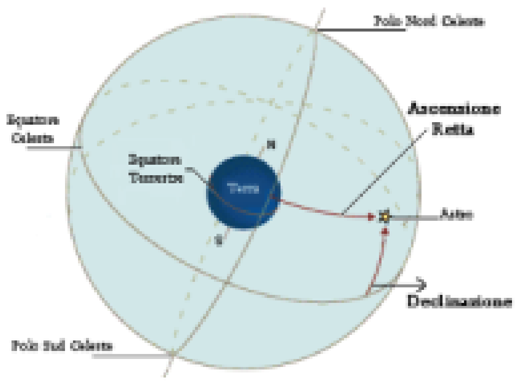
Per un dato arco AB, Ipparco, in un libro perduto, dà il numero di unità della corrispondente corda AB. Tale numero è equivalente alle moderne funzioni goniometriche. (Nella figura uno schema del ragionamento di Ipparco).



Se 2α è l'angolo al centro dell'arco AB, Ipparco dà il numero di unità contenute in $2AC$ rispetto al raggio, che ne contiene 60.

2.2. Derivazione astronomica

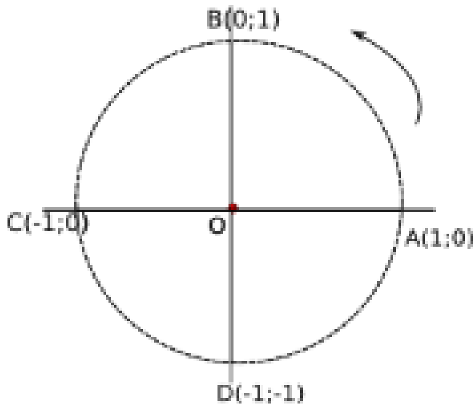
Da ciò si deduce che l'origine della trigonometria, così come la conosciamo oggi, è legata all'astronomia e quindi alla individuazione delle altezze dei corpi celesti attraverso la misura, fatta da terra, dell'angolo da essi formato con l'orizzonte. L'altezza, o declinazione di una stella, è oggi l'angolo al centro sotteso da un arco di meridiano celeste compreso fra l'equatore celeste e il parallelo passante per l'oggetto.



La circonferenza viene divisa in 360°, come già fatto dai Babilonesi, e il diametro in 120 parti. Ciascuna di queste parti vengono ulteriormente divise in 60 parti secondo il sistema babilonese di frazioni sessagesimali.

2.3. Descrizione moderna

Nella matematica moderna l'approccio è assai simile, ma è ottenuto attraverso l'utilizzo del piano cartesiano nel quale è rappresentata una circonferenza, detta goniometrica, che ha per centro l'origine del piano e raggio unitario, come in figura.

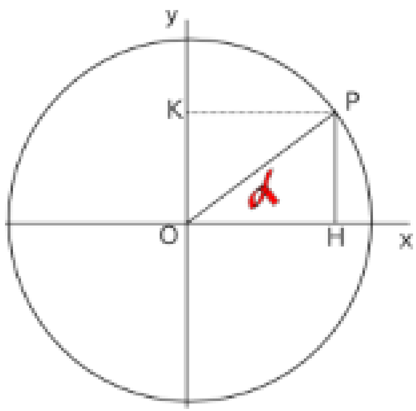


Il legame tra la corda, o semicorda e l'angolo al centro, è espresso mediante l'introduzione di una funzione, che svolge appunto questo ruolo di «intermediario».

DEFINIZIONE 11. Dicesi seno di un angolo, in simboli $\sin\alpha$, il rapporto tra la proiezione del raggio sull'asse delle ordinate e il raggio stesso. In pratica, indica il rapporto tra la semicorda e il raggio.

$$\sin\alpha = \frac{PH}{OP}$$

essendo il raggio unitario, è possibile assimilare il seno di un angolo alla ordinata del punto P, intersezione tra il secondo lato dell'angolo e la circonferenza.



Osservando la figura, il punto P, come ogni punto del piano cartesiano, è caratterizzato da due coordinate.

DEFINIZIONE. Chiamiamo coseno dell'angolo α, in simboli $\cos\alpha$, il rapporto tra la proiezione del raggio sull'asse delle ascisse e il raggio stesso.

$$\cos\alpha = \frac{OH}{OP}$$

Essendo il raggio unitario, $\cos\alpha$ rappresenta l'ascissa del punto P sulla circonferenza.

Pertanto, il punto P sulla circonferenza avrà coordinate

$$P\left(\cos\alpha; \sin\alpha\right)$$

È facile osservare che, poiché il triangolo OPH in figura è rettangolo, applicando il teorema di Pitagora, si ha

$$OH^2 + PH^2 = OP^2$$

ma $OH = \cos\alpha$ e $PH = \sin\alpha$, e quindi

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

questa è detta **prima relazione fondamentale della goniometria**.

Al variare di P sulla circonferenza corrispondono variazioni nei valori del seno e del coseno. In particolare

- I Quadrante: $\begin{array}{ccc} \sin\alpha & \textit{crescente} & >0 \\ \cos\alpha & \textit{decrescente} & >0 \end{array}$
- II Quadrante: $\begin{array}{ccc} \sin\alpha & \textit{decrescente} & >0 \\ \cos\alpha & \textit{decrescente} & <0 \end{array}$
- III Quadrante: $\begin{array}{ccc} \sin\alpha & \textit{decrescente} & <0 \\ \cos\alpha & \textit{crescente} & <0 \end{array}$
- IV Quadrante: $\begin{array}{ccc} \sin\alpha & \textit{crescente} & <0 \\ \cos\alpha & \textit{crescente} & >0 \end{array}$

Definizione. Chiamasi tangente di un angolo il rapporto tra il seno e il coseno dello stesso angolo. Tale definizione è indipendente dal raggio e nella circonferenza goniometrica corrisponde al rapporto tra l'ordinata e l'ascissa del punto sulla circonferenza che che delimita l'angolo al centro.

Esercizi

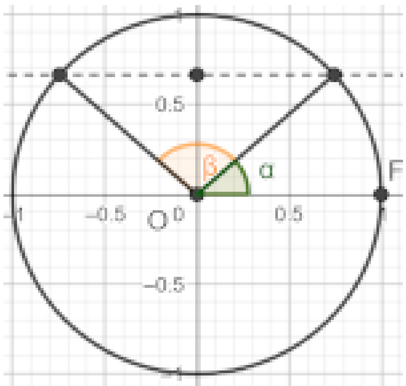
Esercizio 12. Stabilire in quale quadrante cade il secondo estremo dei seguenti archi:

- $315°$: IV quadrante con angoli $270° < \alpha < 360°$
- $117°$: II quadrante con angoli $90° < \alpha < 180°$
- $12°$: I quadrante con angoli $0° < \alpha < 90°$

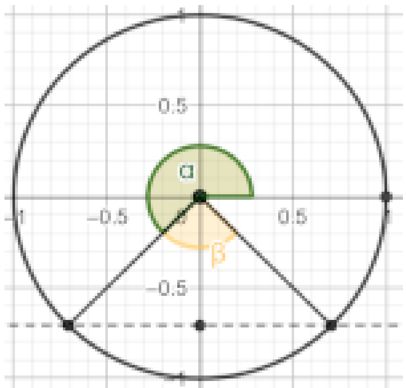
$\frac{5}{4}\pi$: III quadrante con angoli $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

Esercizio 13. Disegna, servendoti della circonferenza goniometrica, gli angoli tali che sia $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$, $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, $\tan\alpha = -\frac{5}{4}$

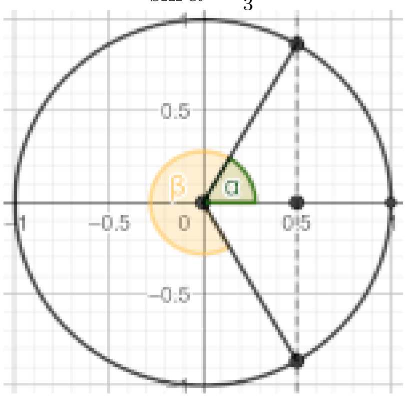
Soluzione. per rappresentare correttamente la $\sqrt{2}$, ricordiamo che è il valore del lato del quadrato inscritto nella crf di raggio 1.



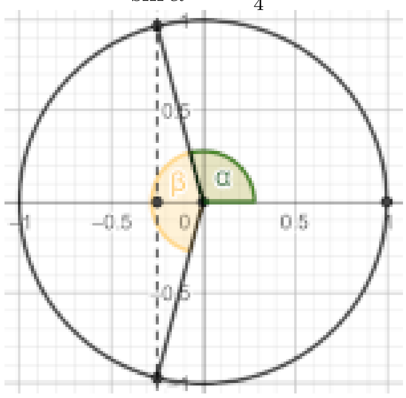
$\sin\alpha = \frac{2}{3}$



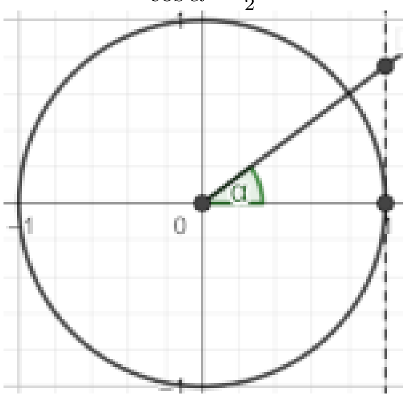
$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$



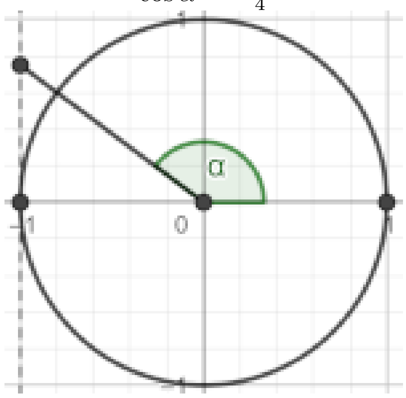
$\cos\alpha = \frac{1}{2}$



$\cos\alpha = -\frac{1}{4}$



$\tan\alpha = \frac{3}{4}$



$\tan\alpha = -\frac{5}{4}$

Esercizio 14. Calcolare il valore delle seguenti espressioni:

Per risolvere tali esercizi è necessario ricordare i valori del seno e coseno per gli angoli $0°$, $90°$, $180°$, $270°$, $360°$
.

Riassumo in una tabella i valori per tali angoli e per gli angoli particolari di $30°$, $45°$, $60°$

Angolo (α)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$0°$ - 0^r	0	1
$30°$ - $\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$45°$ - $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$60°$ - $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$90°$ - $\frac{\pi}{2}$	1	0
$180°$ - π	0	-1
$270°$ - $\frac{3\pi}{2}$	-1	0
$360°$ - 2π	0	1

- $\sin\frac{\pi}{2}+2\sin\pi-3\sin\frac{3\pi}{2}-2\sin 0=1+2\cdot 0-3\cdot(-1)-2\cdot 0=4$
- $4\sin 2\pi-\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{5}{2}\sin\frac{5\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi=4\cdot 0-\frac{3}{2}\cdot 1+\frac{5}{2}\cdot(1)-\frac{1}{2}\cdot 0=1$
  L'angolo $\frac{5\pi}{2}=2\pi+\frac{\pi}{2}$, cioè un giro intero più un quarto. Le funzioni goniometriche seno e coseno hanno un periodo di $360°$, cioè i valori si ripetono esattamente dopo ogni giro.
- $\sin 7\pi+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{2}+4\sin\frac{\pi}{6}-5\sin 3\pi=0+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-(-1)+4\cdot\frac{1}{2}=4$
- $\frac{\sin(-270°)[\cos 450°-\cos(-180°)+3\cos(-360°)]}{\cos(-540°)[\sin 90°+4\sin(-270°)]}=\frac{\sin(90°)[\cos 90°-\cos(180°)+3\cos(360°)]}{\cos(180°)[\sin 90°+4\sin(90°)]}=\frac{1[0+1+3]}{-1[5]}=-\frac{4}{5}$

  gli angoli con il segno negativo indicano una rotazione oraria invece che antioraria.

$\frac{a^3[\sin(-\pi)+\cos(-6\pi)]+b^3[\sin\pi+\cos 2\pi]}{a\sin\left(-\frac{7}{2}\pi\right)+b\cos(-2\pi)}=\frac{a^3[0+1]+b^3[0+1]}{a(1)+b(1)}=\frac{a^3+b^3}{a+b}=\frac{(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}{a+b}=a^2-ab+b^2$

Esercizio 15. Se α è un angolo acuto ($0°<\alpha<90°$). determinare le condizioni a cui deve sottostare il parametro k affinché possano essere verificate le seguenti uguaglianze:

Soluzione. 1) $3k\sin\alpha+1=0$. L'angolo si trova nel primo quadrante dove $0<\sin\alpha<1$, per cui, essendo $\sin\alpha=-\frac{1}{3k}$, cioè $k<-\frac{1}{3}$
2) $2k\cos\alpha=k-1$. Anche il coseno è positivo nel primo quadrante ed è compreso in $[0,1]$. Essendo $\cos\alpha=\frac{k-1}{2k}=1$, da cui $k=-1$ e $\frac{k-1}{2k}=0$, cioè $k=1$, pertanto avremo la condizione $k<-1$, $k>1$.
3) $(k-1)\tan\alpha=k-1$. La tangente è positiva nel primo quadrante ed è compresa in $[0,+\infty]$. Essendo $\tan\alpha=\frac{k-1}{k^2+1}$, avremo $\tan\alpha=0$ per $k=1$ e quindi per essere sempre positiva $k>1$.

Esercizio 16. Semplificare la seguente espressione sfruttando le relazioni fondamentali e supponendo che siano definite per i valori di α considerati:

Soluzione. $\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha-\sin\alpha\tan\alpha$. Ricordando che $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, possiamo riscrivere come

$$\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}{\cos\alpha}=\frac{1-1}{\cos\alpha}=0$$

Esercizio 17. Semplificare l'espressione $\tan\alpha\cos\alpha-\sin\alpha-\sin\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}+\tan\alpha$

Soluzione. Ancora sapendo che $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, si ha

$$\cancel{\sin\alpha}-\cancel{\sin\alpha}-\frac{\sin\cancel{\alpha}}{\cancel{c}os\,\alpha}+\cancel{\tan\alpha}=0$$

Esercizio 18. Verificare la seguente identità $\frac{\sin^2\alpha+\tan^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1+\frac{1}{\cos^2\alpha}$

Soluzione. Riscriviamo la relazione

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\sin^2\alpha}=1+\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

da cui

$$1+\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Esercizio 19. Verificare la seguente identità $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\tan\alpha+1}=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\tan\alpha-1}$

Soluzione. Riscriviamo la relazione

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1}=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1}$$

da cui

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}}$$

semplificando

$$\cos\alpha=\cos\alpha$$

Esercizio 20. Verificare la seguente identità $\dfrac{-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\tan\alpha+1}=(1-\tan\alpha)\cos^2\alpha$

Soluzione. Anche in questo caso la tangente compare in entrambi i membri e quindi opereremo su tutte e due, riscrivendo

$$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\left(1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cos^2\alpha$$

osserviamo che $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ dal punto di vista algebrico è una differenza di due quadrati che si può scomporre

$$\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos^2\alpha$$

semplificando

$$\cos\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)=\cos\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)$$

Esercizio 21. Verificare la seguente identità $\dfrac{\sin\alpha+\tan\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}}$

Soluzione. Il reciproco della tangente (detta cotangente) sarà $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ due, riscrivendo

$$\frac{\sin\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\cos\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

da cui

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\cos\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\frac{\cos\alpha\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

raccogliendo

$$\frac{\frac{\sin\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos\alpha}}{1+\cos\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\frac{\cos\alpha(\sin\alpha+1)}{\sin\alpha}}$$

ossia

$$\frac{\sin\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos\alpha}\frac{1}{1+\cos\alpha}=(1+\sin\alpha)\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha+1)}$$

e semplificando

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Espressioni delle funzioni goniometriche mediante una sola di esse

ESERCIZIO 22. Determinare $\cos\alpha$ sapendo che $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ con $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

SOLUZIONE. applichiamo la prima relazione fondamentale della goniometria, da

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

si ha

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

ma, appartenendo l'angolo α al IV quadrante, nel quale il coseno è positivo, avremo

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

ESERCIZIO 23. Calcolare i valori delle rimanenti funzioni sapendo che $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

SOLUZIONE. applichiamo la prima relazione fondamentale della goniometria,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

da cui si ha

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

ma, appartenendo l'angolo α al I quadrante, nel quale il coseno è positivo, avremo

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$$

e la tangente sarà

$$\tan\alpha = \frac{\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}} = \frac{8}{15}$$

ESERCIZIO 24. Calcolare i valori delle rimanenti funzioni sapendo che $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ con $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

SOLUZIONE. dalla prima relazione fondamentale della goniometria si ha,

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

ma, appartenendo l'angolo α al III quadrante, nel quale il seno è negativo, avremo

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

e la tangente sarà

$$\tan\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ESERCIZIO 25. Calcolare i valori delle rimanenti funzioni sapendo che $\tan\alpha = -\frac{7}{24}$ con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

SOLUZIONE. dividiamo tutti i termini della prima relazione fondamentale per $\cos^2\alpha \neq 0$ e avremo

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

da cui

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

e sostituendo il valore assegnato per la tangente

$$\frac{49}{576} + 1 = \frac{625}{576} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

da cui

$$\cos^2\alpha = \frac{576}{625}$$

l'angolo è nel II quadrante dove il coseno è negativo per cui

$$\cos\alpha = -\frac{24}{25}$$

la funzione seno è uguale a

$$\sin\alpha = \cos\alpha\cdot\tan\alpha = -\frac{24}{25}\times\left(-\frac{7}{24}\right) = \frac{7}{25}$$

infatti la funzione seno è positiva nel secondo quadrante.

Esercizio 26. Trasformare la seguente espressione in un altra contenente solo $\cos\alpha$: $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \tan^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\cot^2\alpha$

Soluzione. utilizziamo le definizioni di tangente e cotangente

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha - 2\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} =$$

ma $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$, per cui

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha - \frac{2\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} =$$

cioè

$$= \frac{2-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha - \frac{2\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$$

da cui sommando tutte le frazioni=

$$= \frac{\left(2-\cos^2\alpha\right)\left(1-\cos^2\alpha\right) + \cos^4\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right) - 2\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)} =$$

e svolgendo i calcoli

$$= \frac{2-3\cos^2\alpha-\cos^6\alpha}{\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}$$

Esercizio 27. Trasformare la seguente espressione in un altra contenente solo $\tan\alpha$: $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \cos^2\alpha + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \cos\alpha$

Soluzione. utilizziamo la definizione di tangente e la proprietà fondamentale

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \cos^2\alpha + \frac{1}{\tan^2\alpha} =$$

$$= \tan^2\alpha + 1 - \frac{1}{\tan^2\alpha+1} + \frac{1}{\tan^2\alpha}$$

Esercizio 28. Applicando le relazioni fondamentali, verificare la seguente identità: $(2\cos\alpha+3\sin\alpha)^2 + (3\cos\alpha-2\sin\alpha)^2 = 13$

Soluzione. svolgiamo i quadrati dei due binomi

$$4\cos^2\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha + 9\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha - 12\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha = 13$$

$$13\cos^2\alpha + 13\sin^2\alpha = 13$$

da cui, dividendo per 13

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad 1 = 1$$

Esercizio 29. Applicando le relazioni fondamentali, verificare la seguente identità:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\cot\alpha}{\sin\alpha}$$

SOLUZIONE. sommiamo le frazioni al primo membro

$$\frac{\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\cot\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{2\cot\alpha}{\sin\alpha}$$

cioè

$$\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{2\cot\alpha}{\sin\alpha}$$

e ricordando la definizione di cotangente

$$\frac{2\cot\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\cot\alpha}{\sin\alpha}$$

ESERCIZIO 30. Applicando le relazioni fondamentali, verificare la seguente identità:

$$(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\tan\alpha}$$

SOLUZIONE. al primo membro abbiamo un prodotto notevole

$$1-\sin^2\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

cioè, ricordando le proprietà fondamentali

$$\cos^2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

e semplificando

$$\cos^2\alpha=\cos^2\alpha$$

Periodo delle funzioni.

ESERCIZIO 31. Calcolare il periodo delle seguenti funzioni:

$$1)\, y=\sin 5x \quad 2)\, y=\cos 5x \quad 3)\, y=\tan 5x$$

SOLUZIONE. le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ hanno un periodo di 2π, cioè si ripetono identiche a se stesse ogni 2π o $(360°)$; la funzione $\tan x$ ha invece un periodo di π. Il periodo delle funzioni seno e coseno è dato da $T=\frac{2\pi}{\omega}1$, mentre per la tangente è $\frac{\pi}{\omega}$, dove ω è il coefficiente a moltiplicare la variabile x. Le funzioni assegnate hanno un argomento pari a $5x$, per cui i rispettivi periodi sono

$$T_1=\tfrac{2\pi}{5} \quad T_2=\tfrac{2\pi}{5} \quad T_3=\tfrac{\pi}{5}$$

ESERCIZIO 32. Calcolare il periodo delle seguenti funzioni:

$$y=3\cos(2x+15°) \quad y=\tan\tfrac{x}{3}$$

SOLUZIONE.

$$T_1=\tfrac{2\pi}{2}=\pi \quad T_2=\tfrac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$$

ESERCIZIO 33. Calcolare il periodo della seguente funzione:

$$y=\sin(x+30°)-\cos(2x-10°)+\tan 4x$$

OSSERVAZIONE 34. Questa è la somma di tre funzioni goniometriche; il periodo comune sarà dato dal minimo comune multiplo tra i periodi di ogni addendo, cioè

$$mcm\,(360°,180°,45°)=360°$$

ESERCIZIO 35. Calcolare il periodo della seguente funzione:

$$y=\sin\frac{3}{5}x+\sin\frac{2}{3}x$$

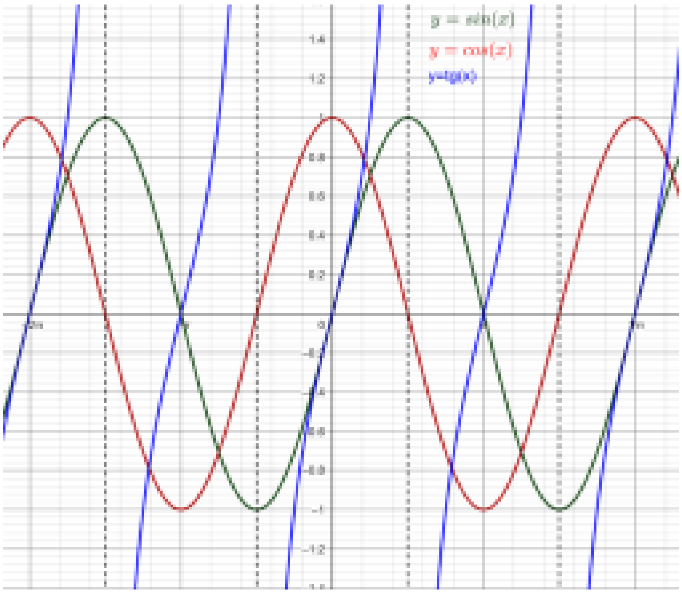
SOLUZIONE. Questa è la somma di due funzioni goniometriche; il periodo comune sarà dato dal minimo comune multiplo tra i due singoli periodi, cioè

$$mcm\left(\frac{2\pi}{\frac{3}{5}},\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}\right)=mcm\left(\frac{10}{3}\pi,3\pi\right)=mcm\left(\frac{10}{3}\pi,\frac{9}{3}\pi\right)=\frac{90}{3}\pi=30\pi$$

Grafici delle funzioni goniometrico e loro trasformazioni nel piano

Presentiamo i grafici delle funzioni seno, coseno e tangente. Essi riassumono le proprietà delle funzioni, in particolare:

- le funzioni seno e coseno sono funzioni limitate, cioè per ogni valore della variabile x, la variabile y può assumere solo valori compresi tra $-1 \leq y \leq 1$. Ha periodo uguale a 2π; gli intervalli di crescenza e decrescenza, positività e negatività sono facilmente osservabili dal grafico
- la funzione tangente ha periodicità π; essa presenta punti di discontinuità per $x = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$ con $k = 0, 1, 2, ...$



Vengono di seguito raccolte sinteticamente le equazioni di trasformazione relative alle isometrie e alle affinità.

- Equazioni che descrivono una traslazione:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

dove x, y sono le variabili che descrivono le coordinate dei punti nella posizione iniziale e x', y' quelle per i punti traslati. a, b indicano gli spostamenti in orizzontale e in verticale che caratterizzano la traslazione; si possono intendere anche come le componenti del vettore traslazione $\overrightarrow{r}(a, b)$.

- Equazioni che descrivono le simmetrie rispetto a un asse parallelo agli assi coordinati o rispetto all'origine del piano cartesiano
  - retta parallela all'asse x:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

  - retta parallela all'asse y

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

  - simmetria rispetto all'origine

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

- Dilatazione o compressione (non sono più isometrie)

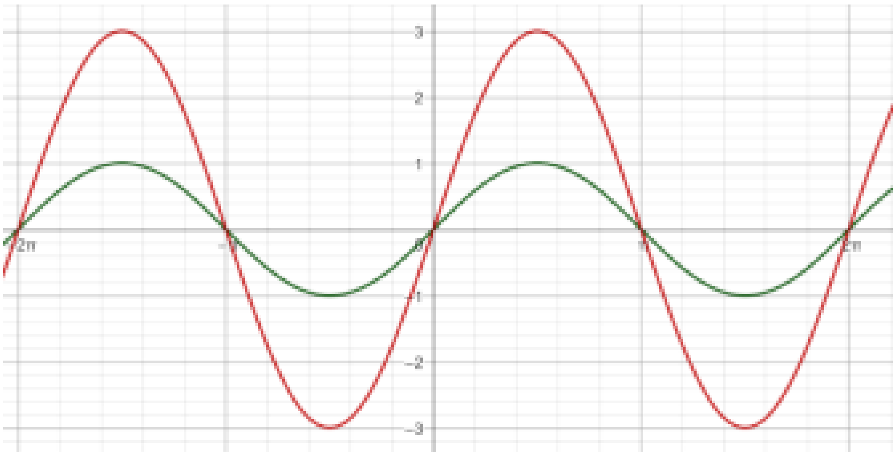
$$\begin{cases} x' = hx \\ y' = ky \end{cases}$$

dove h, k sono i coefficienti di dilatazione o di compressione

Esercizio 36. Traccia il grafico della seguente funzione, indicandone il periodo, il dominio e il codominio:

$$y = 3 \sin x$$

Soluzione. La funzione di riferimento è la sinusoide descritta dalla funzione seno. In questo caso si chiede che, dopo aver determinato i valori y della funzione $\sin x$, questi vengono triplicati. La trasformazione è quindi una dilatazione solamente verticale. (il grafico illustra la funzione iniziale e la sua trasformata limitandoci all'intervallo $[-2\pi; 2\pi]$)

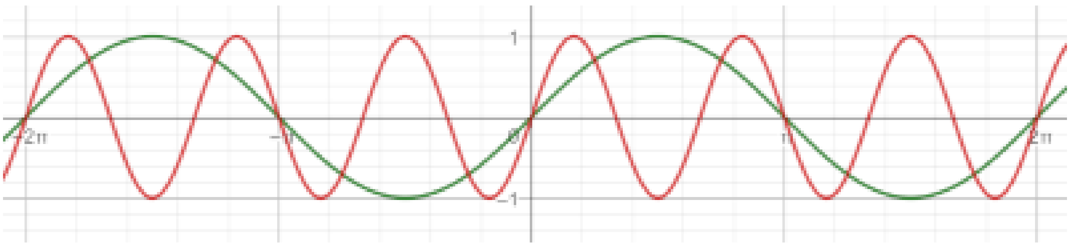


Il periodo rimane invariato $T = 2\pi$ così come il dominio (i valori assumibili dalla x), mentre la funzione è ancora limitata ma il suo codominio (cioè i valori che la y può assumere) diviene $[-3; 3]$

Esercizio 37. Traccia il grafico della seguente funzione, indicandone il periodo, il dominio e il codominio:

$$y = \sin 3x$$

Soluzione. In questo caso si chiede che, dopo aver scelto il valore x dell'angolo, questo venga triplicato per poi calcolare il valore del seno di questo nuovo angolo. Qui si tratta di una compressione solamente orizzontale. (il grafico illustra la funzione iniziale e la sua trasformata nell'intervallo $[-2\pi; 2\pi]$)

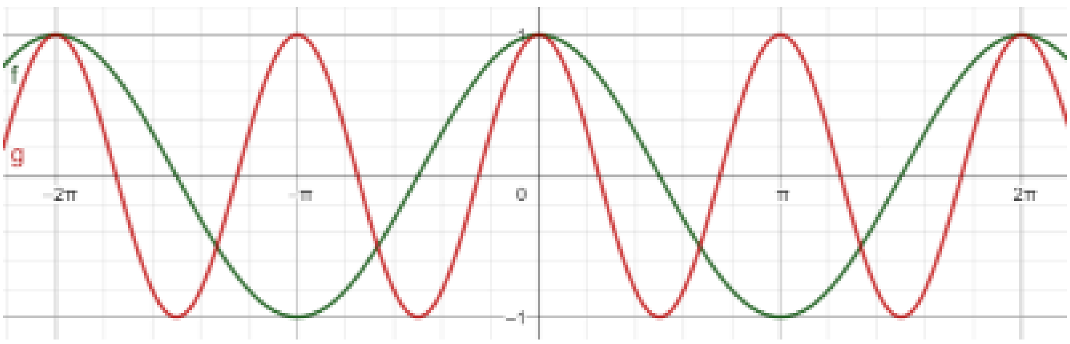


Il periodo diviene $T = \frac{2\pi}{3}$; il dominio rimane invariato, così come il codominio.

Esercizio 38. Traccia il grafico della seguente funzione, indicandone il periodo, il dominio e il codominio:

$$y = \cos 2x$$

Soluzione. In questo caso si chiede che, dopo aver scelto il valore x dell'angolo, questo venga raddoppiato per poi calcolare il valore del coseno di questo nuovo angolo. Qui si tratta di una compressione solamente orizzontale. (il grafico illustra la funzione iniziale e la sua trasformata nell'intervallo $[-2\pi; 2\pi]$)

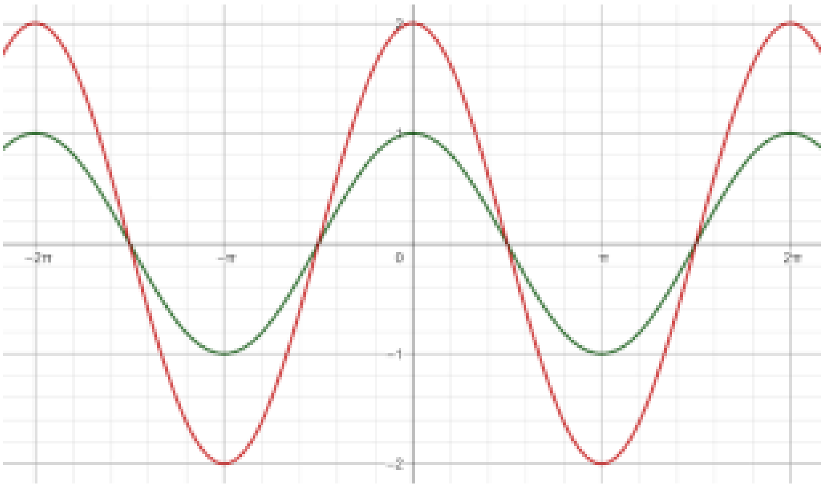


Il periodo diviene $T = \pi$; il dominio rimane invariato, così come il codominio.

Esercizio 39. Traccia il grafico della seguente funzione, indicandone il periodo, il dominio e il codominio:

$$y = 2\cos x$$

Soluzione. La funzione di riferimento è la cosinusoide descritta dalla funzione coseno. In questo caso si chiede che, dopo aver determinato i valori y della funzione $\cos x$, questi vengono raddoppiati. La trasformazione è quindi una dilatazione solamente verticale. (il grafico illustra la funzione iniziale e la sua trasformata limitandoci all'intervallo $[-2\pi; 2\pi]$)

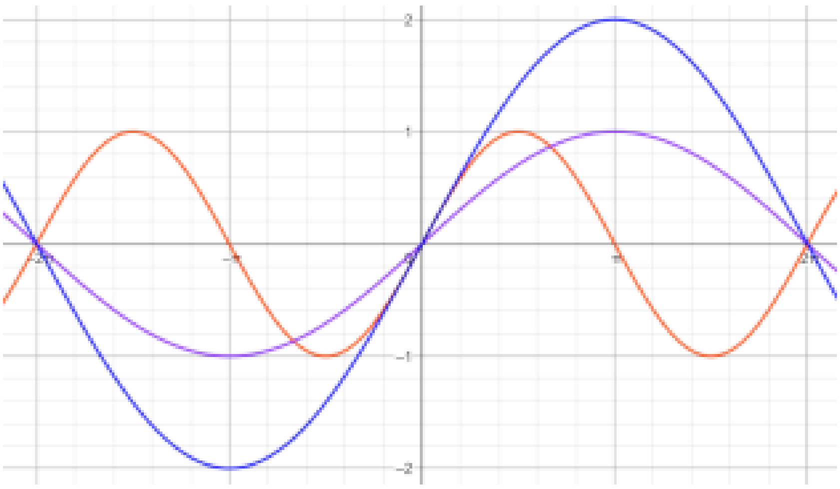


Il periodo e il dominio rimangono invariati; il codominio diviene $[-2; 2]$.

Esercizio 40. Traccia il grafico della seguente funzione, indicandone il periodo, il dominio e il codominio:

$$y = 2\sin\frac{x}{2}$$

Soluzione. La funzione di riferimento è la funzione seno. In questo caso si chiede che, dopo aver scelto i valori x della funzione $\sin x$, questi vengano dimezzati e dopo averne calcolato il corrispondente valore del seno, tale risultato venga raddoppiato. La trasformazione è quindi una dilatazione sia orizzontale che verticale (il grafico illustra la funzione iniziale e la sua trasformata limitandoci all'intervallo $[-2\pi; 2\pi]$)

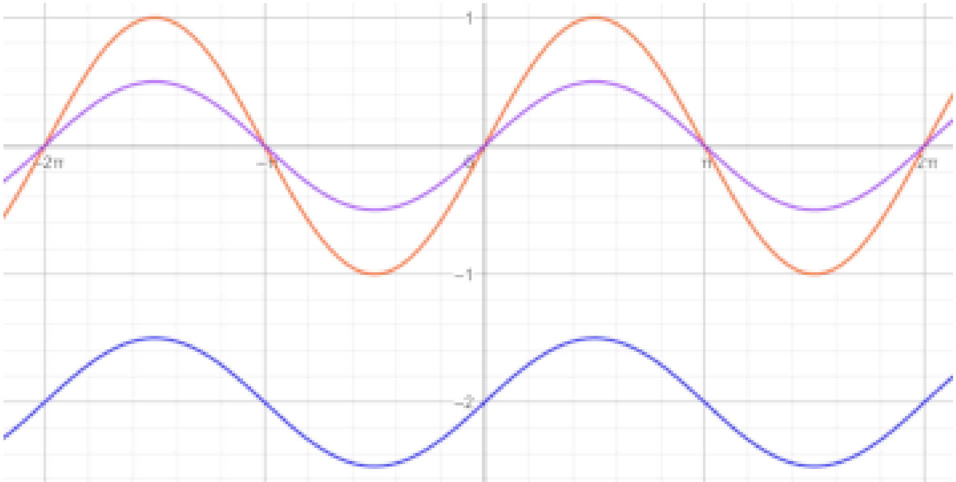


In arancio la funzione seno; in viola la $y = \sin\frac{x}{2}$ e in blu la funzione richiesta. Il periodo della funzione assegnata (in blu) è $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$; il dominio rimane invariato mentre il codominio diviene $[-2; 2]$.

Esercizio 41. Traccia il grafico della seguente funzione, indicandone il periodo, il dominio e il codominio:

$$y = \frac{1}{2}\sin x - 2$$

Soluzione. Si chiede di calcolare per i valori x della funzione $\sin x$ i corrispondenti valori di y; questi vengono poi dimezzati e al risultato viene aggiunto il numero 2. La trasformazione è quindi una compressione verticale e una traslazione pure verticale, coinvolgendo i valori della y.

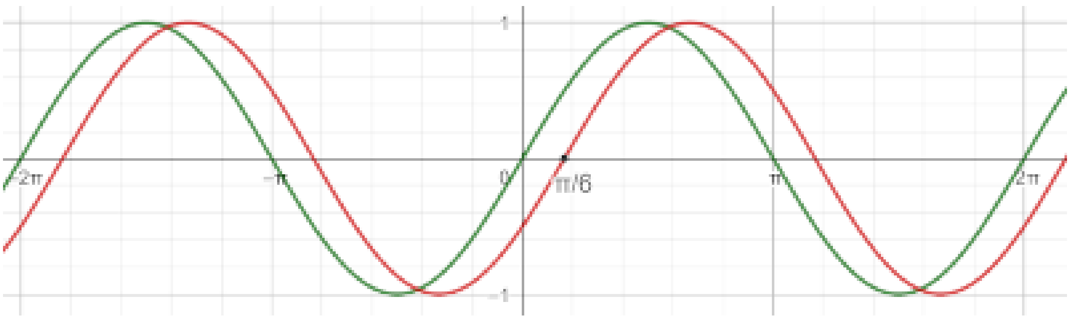


In successione: in arancio la funzione seno; in viola la $y = \frac{1}{2}\sin x$ (compressa verticalmente); in blu la funzione richiesta, traslata verso il basso di due unità. Il periodo della funzione assegnata (in blu) è invariato $T = 2\pi$, così come il dominio mentre il codominio diviene $\left[-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right]$.

Esercizio 42. Traccia il grafico della seguente funzione, indicandone il periodo, il dominio e il codominio:

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Soluzione. Assegnato x si chiede di calcolare il seno di $x - 30°$. Questa trasformazione si identifica come una traslazione orizzontale verso destra.

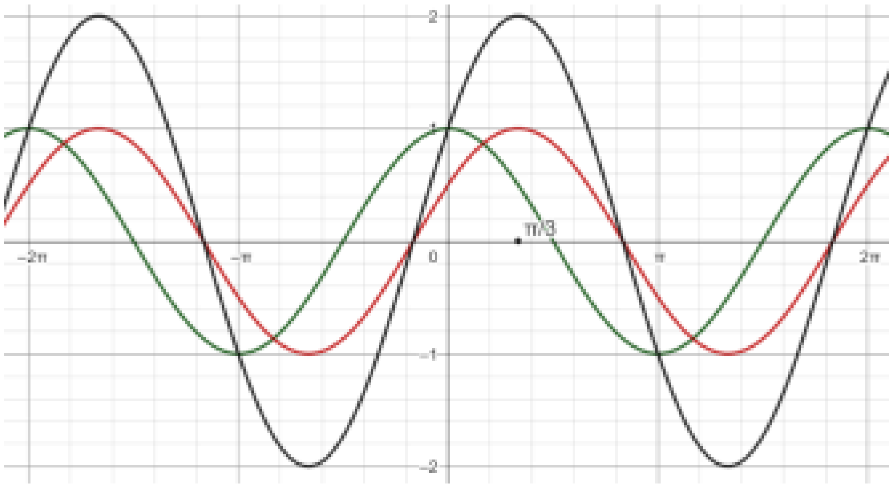


Periodo, dominio e codominio rimangono invariati.

Esercizio 43. Traccia il grafico della seguente funzione, indicandone il periodo, il dominio e il codominio:

$$y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Soluzione. Assegnato x si chiede di calcolare il coseno di $x - 60°$ e poi di raddoppiare il risultato ottenuto. Questa trasformazione si identifica come una traslazione orizzontale verso destra e una dilatazione verticale.

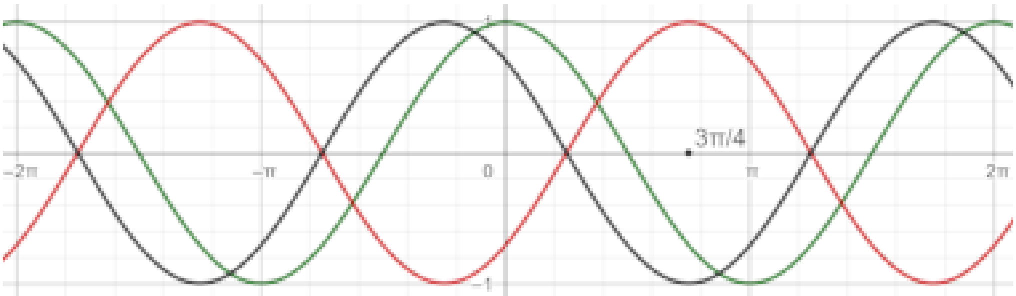


Il Periodo e il dominio rimangono invariati, mentre il codominio è rappresentato dall'intervallo $[-2; 2]$.

Esercizio 44. Traccia il grafico della seguente funzione, indicandone il periodo, il dominio e il codominio:

$$y = -\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

Soluzione. Assegnato x si chiede di calcolare il coseno di $x - 135°$ e poi di cambiare il segno il risultato ottenuto. Questa trasformazione si identifica come una traslazione orizzontale verso destra e una simmetria rispetto all'asse x (cambia, infatti il segno del valore di y, mentre il valore di x non subisce cambiamenti).

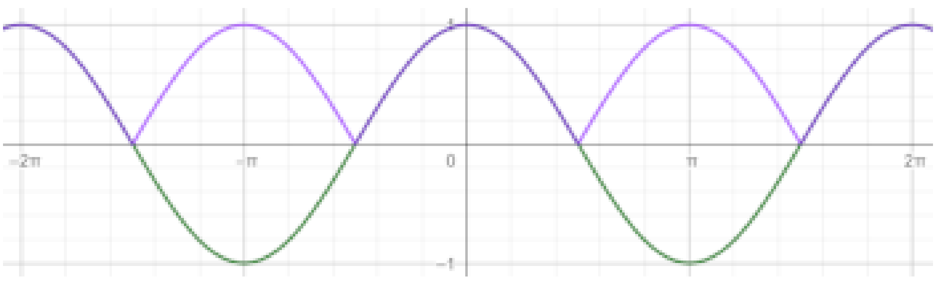


In successione, linea verde: $\cos x$; linea rossa $\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$; linea nera $-\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$. La curva con tratto nero è simmetrica alla curva con tratto rosso rispetto all'asse x. Periodo, dominio e codominio rimangono invariati.

Esercizio 45. Traccia il grafico della seguente funzione, indicandone il periodo, il dominio e il codominio:

$$y = |\cos x|$$

Soluzione. In questo caso il valore assoluto riguarda il risultato, y, restituito dalla funzione coseno applicata agli angoli x. Il valore di y dovrà risultare sempre positivo.

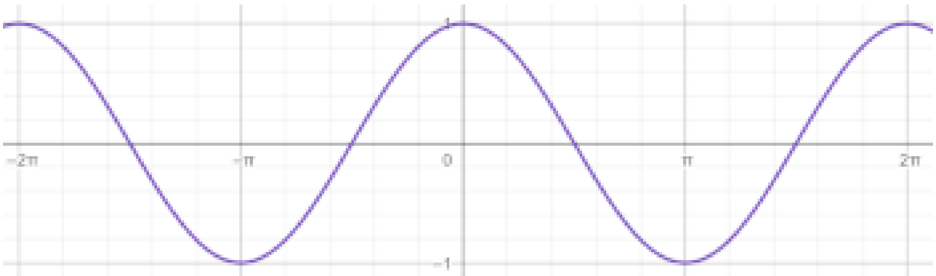


La curva con tratto viola rappresenta la funzione in valore assoluto; si nota che la parte positiva si sovrappone alla funzione coseno, mentre la parte negativa subisce una simmetria rispetto all'asse x. Il dominio rimane invariato, il periodo diventa π, il codominio è rappresentato dall'intervallo $[0, 1]$.

Esercizio 46. Traccia il grafico della seguente funzione, indicandone il periodo, il dominio e il codominio:

$$y = \cos|x|$$

Soluzione. In questo caso il valore assoluto è della variabile indipendente, x, che, quindi, viene sempre reso positivo prima che venga utilizzato per il calcolo della funzione coseno.

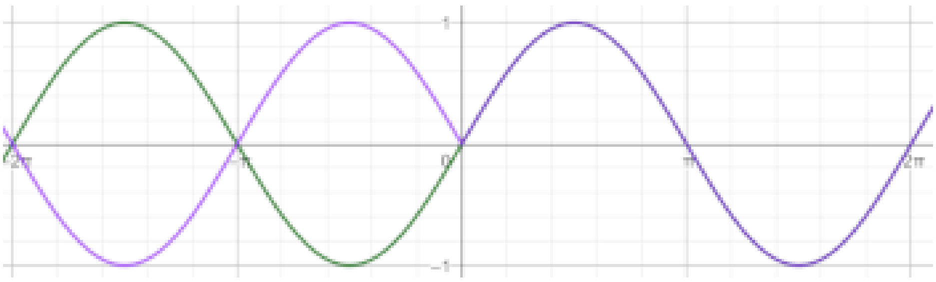


Come si vede i grafici di $\cos x$ e di $\cos|x|$ sono esattamente sovrapposti. In questo caso è come se vi fosse una simmetria rispetto all'asse delle y (la sovrapposizione deriva dal fatto che il coseno è già di per sé una funzione il cui grafico è simmetrico rispetto all'asse y, cioè, come si dice, è una funzione pari. Algebricamente significa che $\cos x = \cos(-x)$. Dominio, codominio, periodo rimangono invariati.

Esercizio 47. Traccia il grafico della seguente funzione, indicandone il periodo, il dominio e il codominio:

$$y = \sin|x|$$

Soluzione. In questo caso il valore assoluto è della variabile indipendente, x, che, quindi, viene sempre reso positivo prima che venga utilizzato per il calcolo della funzione seno.



Come si vede il grafico di $\cos|x|$ (in viola) è simmetrico rispetto all'asse y.

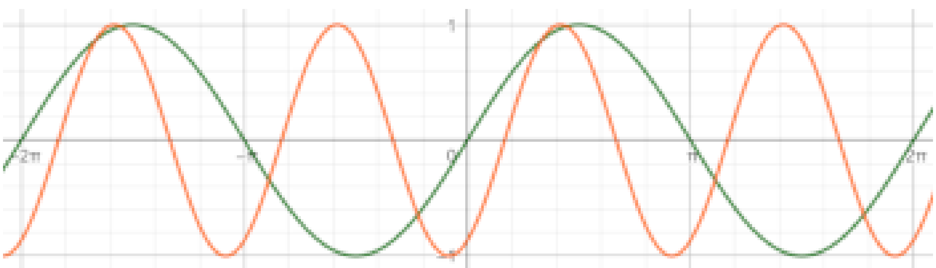
Esercizio 48. Traccia il grafico della seguente funzione, indicandone il periodo, il dominio e il codominio:

$$y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Soluzione. prima di eseguire le trasformazioni, raccogliamo nell'argomento della funzione seno, ottenendo

$$y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Si osserva che vi sono due operazioni da compiere sull'argomento del seno: 1° assegnato x, sottrarre ad esso $\frac{\pi}{6}$; raddoppiare poi il valore ottenuto. Infine, calcolare il seno di quest'ultimo valore . Avremo quindi una traslazione orizzontale verso destra e poi un contrazione orizzontale.

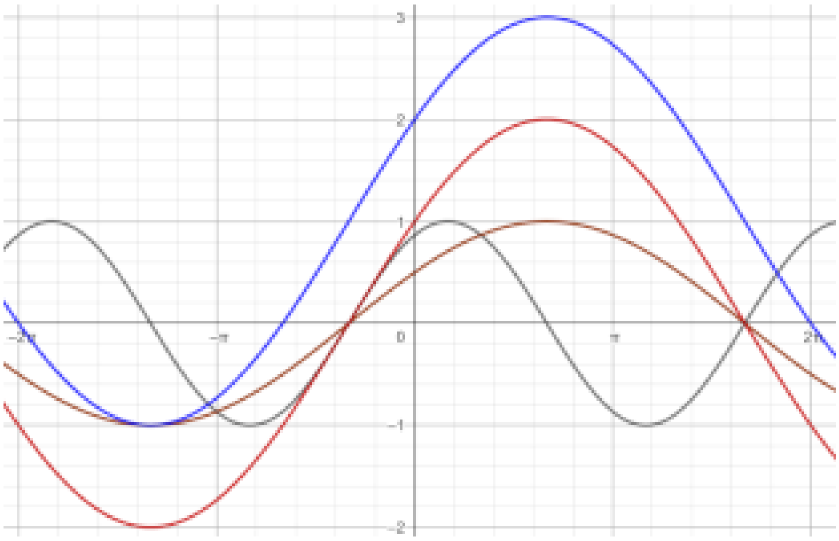


Dominio e codominio rimangono invariati, mentre la periodicità si dimezza.

Esercizio 49. Traccia il grafico della seguente funzione, indicandone il periodo, il dominio e il codominio:

$$y = 2\sin\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] + 1$$

Soluzione. Qui abbiamo sia la traslazione orizzontale verso sinistra, sia quella verticale verso l'alto; abbiamo poi la dilatazione sia orizzontale che verticale.



Tralasciamo il grafico del seno. Linea grigia: traslazione verso sinistra di $\frac{\pi}{3}$; linea marrone: dilatazione orizzontale (dimezzato il valore dell'angolo); 3° linea rossa: dilatazione verticale (raddoppiato il valore di y); 4° linea blu: traslazione verso l'alto pari a 1 unità. Il Dominio rimane invariato, il codominio è compreso nell'intervallo $[-1;3]$; mentre la periodicità raddoppia.

Formule goniometriche

Addizione e sottrazione. Per formule di addizione e sottrazione si intende il calcolo del valore di una funzione goniometrica quando il suo argomento è espresso come somma o differenza di angoli. Le relazioni sono

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

Esercizio 50. Sapendo che $90° < \alpha < 180°$ e che $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, calcolare $\sin(30° + \alpha)$

Soluzione. applicando la formula relativa all'addizione di due angoli

$$\sin(30° + \alpha) = \sin 30° \cos\alpha + \sin\alpha\cos 30° = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$$

il valore di $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ e quello del coseno nel secondo quadrante (negativo) è

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

per cui

$$\sin(30° + \alpha) = -\frac{2}{5} + \frac{3\sqrt{3}}{10} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$$

Esercizio 51. Semplificare la seguente espressione

$$\frac{2\sin(45° - x)}{\cos(x + 45°) + \cos(x - 45°)}$$

Soluzione. applicando le formule

$$\frac{2(\sin 45°\cos x - \cos 45°\sin x)}{\cos x\cos 45° - \sin x\sin 45° + \cos x\cos 45° + \sin x\sin 45°} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\sqrt{2}\cos x} = 1 - \tan x$$

Esercizio 52. Sapendo che i due angoli acuti α e β di un triangolo sono tali che $\tan\alpha = 2$ e $\tan\beta = 3$ calcolare il terzo angolo γ.

Soluzione. Calcoliamo utilizzando le formule (senza l'uso della calcolatrice) e ricordando che $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$. Per cui

$$\tan\gamma = \tan\left[180° - (\alpha+\beta)\right] = -\tan(\alpha+\beta)$$

ossia

$$\tan\gamma = -\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = -\frac{2+3}{1-6} = 1$$

pertanto $\gamma = 1$.

Esercizio 53. Verificare la seguente identità $\sqrt{3}\sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$

Soluzione. $\sqrt{3}\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \sin\alpha\cos\frac{\pi}{2} = 2\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)$; ricordando che $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\right) = \sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha$$

Formule di duplicazione. Le formule di duplicazione presentano la relazione tra il valore delle funzioni per un qualsiasi angolo e il valore delle stesse funzioni per il doppio di questo angolo. Sono ovviamente un caso particolare delle formule precedenti nel caso in cui $\alpha = \beta$.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

L'applicazione di queste formule può essere utilizzata ogni volta che si vuole collegare un **angolo qualsiasi** al suo doppio. Per cui non solo $\alpha \to 2\alpha$, ma anche $\frac{\alpha}{2} \to \alpha$, $2\alpha \to 4\alpha$, ecc.

Esercizio 54. Sapendo che $\cos\alpha = \frac{24}{25}$ e $0 < \alpha < 90°$, calcolare $\tan 2\alpha$.

Soluzione. Calcoliamo dapprima anche il valore della funzione seno (positivo) con angolo nel primo quadrante

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{576}{625}} = \frac{7}{25}$$

da cui

$$\tan\alpha = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}$$

allora

$$\tan 2\alpha = \frac{2\times\frac{7}{24}}{1-\left(\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{\frac{7}{12}}{1-\frac{49}{576}} = \frac{7}{12}\times\frac{576}{527} = \frac{336}{527}$$

Esercizio 55. Conoscendo $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, determinare $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

Soluzione. Calcoliamo dapprima il coseno (positivo) con angolo nel primo quadrante

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

applichiamo la formula di addizione

$$\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{6} - \sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

e poi quella di duplicazione

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) - \frac{1}{2}\left(2\sin\alpha\cos\alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{144}{169} - \frac{25}{169}\right) - \frac{5}{13}\times\frac{12}{13} = \frac{119\sqrt{3} - 60}{169}$$

Esercizio 56. Semplificare la seguente espressione

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$$

Soluzione. Applichiamo la formula di duplicazione più conveniente dal punto di vista algebrico

$$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$$

Esercizio 57. Esprimere in funzione di $\tan\frac{\alpha}{2}$ la seguente espressione

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Soluzione. Applichiamo la formula di duplicazione poiché α è il doppio di $\frac{\alpha}{2}$

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}$$

Esercizio 58. Verificare la seguente identità

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\cos 2\alpha}=\frac{1}{2}(1+\tan\alpha)^2$$

Soluzione. applichiamo le relazioni

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1}{2}(1+\tan\alpha)^2$$

dividendo il tutto per $\cos^2\alpha$

$$\frac{\tan^2\alpha+1+2\tan\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\tan\alpha)^2$$

e ricordando i prodotti notevoli

$$\frac{(1+\tan\alpha)^2}{2}=\frac{(1+\tan\alpha)^2}{2}$$

Esercizio 59. Verificare la seguente identità

$$\frac{2\cos\alpha+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha-\sin 2\alpha}=\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\tan\alpha\right):\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\tan\alpha\right)$$

Soluzione. applichiamo le relazioni e la definizione di tangente

$$\frac{2\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right):\left(\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$\frac{2\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{2\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$$

e semplificando

$$\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

Formule di bisezione. Le formule di bisezione presentano la relazione tra il valore delle funzioni per un qualsiasi angolo e il valore delle stesse funzioni per la metà di questo angolo.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

Queste funzioni mostrano il loro vantaggio nel calcolo algebrico quando le funzioni sono elevate alla seconda, dove è quindi possibile eliminare la presenza delle radici quadrate.

Esercizio 60. Noto $\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$, determinare $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$.

Soluzione. L'angolo α è la metà dell'angolo 2α. Applichiamo la formula di bisezione

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{3}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{6}}$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{3}}{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{6}}$$

Esercizio 61. Verificare che

$$\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sin\alpha}$$

Soluzione. Applichiamo la formula di bisezione

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{2}{\sin\alpha}$$

razionalizziamo le due radici

$$\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}\sqrt{1+\cos\alpha}}{1+\cos\alpha}+\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}\sqrt{1-\cos\alpha}}{1-\cos\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$$
$$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1+\cos\alpha}+\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1-\cos\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$$

applicando la proprietà fondamentale

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$$

sommando le frazioni al primo membro

$$\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$$
$$\frac{2\sin\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$$

da cui

$$\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$$

Esercizio 62. Verificare che

$$\sin 2\alpha+4\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\sin\alpha$$

Soluzione. Al secondo membro compare l'angolo α; opereremo quindi trasformando in tale angolo tutti quelli del primo membri

$$2\sin\alpha\cos\alpha+4\sin\alpha\cdot\frac{1-\cos\alpha}{2}=2\sin\alpha$$
$$\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha}+2\sin\alpha\cancel{-2\sin\alpha\cos\alpha}=2\sin\alpha$$

Esercizio 63. Verificare che

$$\tan\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\tan\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

Soluzione. Trasformiamo tutte le funzioni con lo stesso angolo α e ricordando le formule di duplicazione

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{2}$$

moltiplicando e sommando

$$\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha}$$
$$\frac{\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha}$$

Applicazioni ai grafici delle funzioni goniometriche.

Esercizio 64. Tracciare il grafico della funzione dopo averne ricondotto l'equazione alla forma tipica delle funzioni goniometriche

$$y=\sin x+\cos x$$

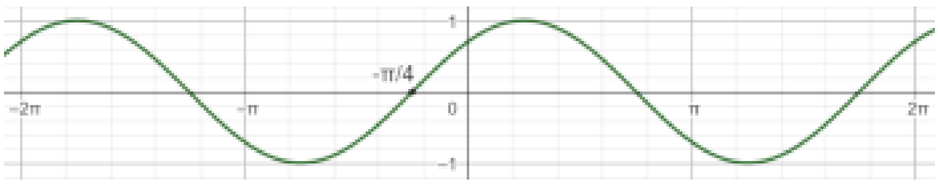
Soluzione. Per ottenere una forma con la presenza di una sola funzione goniometrica, applichiamo le formule di addizione e sottrazione, operando prima la trasformazione

$$y=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$$

siccome $\frac{\sqrt{2}}{2}$ è il valore del seno e del coseno di un angolo di $45°$, la scrittura si può intendere come

$$y=\sqrt{2}\left(\sin x\cos 45°+\sin 45°\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+45°\right)$$

avremo quindi una funzione seno traslata orizzontalmente verso sinistra di $45°$ e dilatata verticalmente.



Esercizio 65. Tracciare il grafico della funzione dopo averne ricondotto l'equazione alla forma tipica delle funzioni goniometriche

$$y=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$$

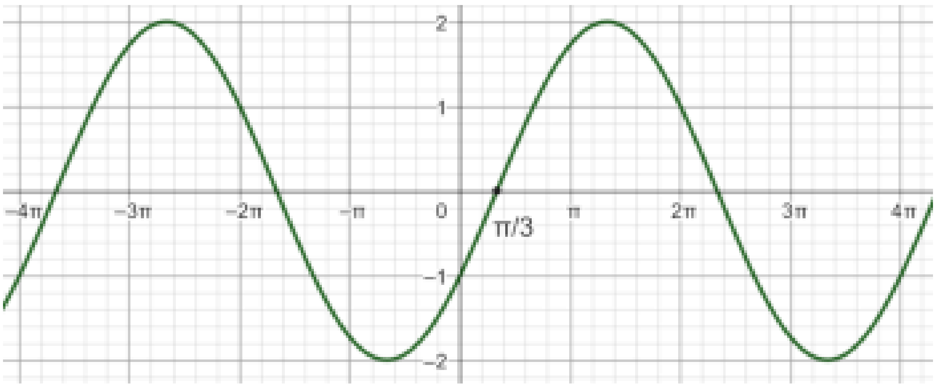
Soluzione. Per ottenere una forma con la presenza di una sola funzione goniometrica, applichiamo le formule di addizione e sottrazione, operando prima la trasformazione

$$y=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$$

Ma $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **e** $\sin 30°=\frac{1}{2}$ per cui

$$y=2\left(\sin\frac{x}{2}\cos 30°-\sin 30°\cos\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{x}{2}-30°\right)$$

avremo quindi una funzione seno traslata orizzontalmente verso destra di $30°$, dilatata verticalmente e orizzontalmente di periodo 4π



Esercizio 66. Tracciare il grafico della funzione dopo averne ricondotto l'equazione alla forma tipica delle funzioni goniometriche

$$y=-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+1$$

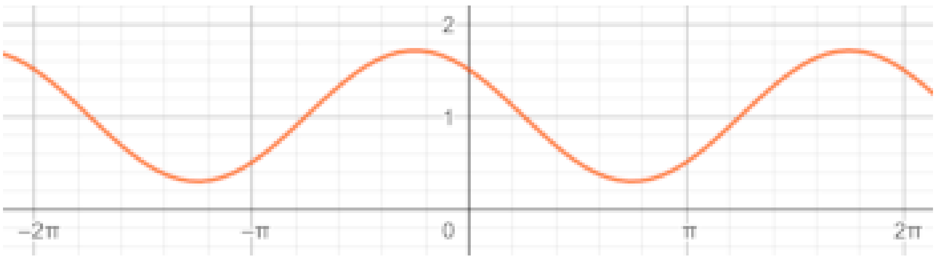
Soluzione. Per ottenere una forma con la presenza di una sola funzione goniometrica, applichiamo prima il raccoglimento a fattor comune e poi le formule di addizione e sottrazione, operando prima la trasformazione

$$y=-\frac{1}{2}\left[(\sin x-\cos x)\right]+1$$

Ma $\cos 45°=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$per cui

$$y=-\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)\right]+1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x-45°\right)+1$$

avremo quindi una funzione seno traslata orizzontalmente verso destra di 45° e verso l'alto di una unità; dilatata verticalmente e riflessa rispetto all'asse x.



Equazioni e disequazioni goniometriche

Equazioni elementari. Il termine elementare non è sempre sinonimo di equazione semplice, ma descrive tutti i casi in cui le equazioni sono, o sono riconducibili, a forme del tipo $af\left(x\right)=k$, dove $f\left(x\right)$ rappresenta una funzione goniometrica e k un numero reale.

Esercizio 67. $y=2\sin^2 x=1$

Soluzione. Dividendo per 2, si ha

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}$$

cioè

$$\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

per cui

$$x=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi,.........$$

questo insieme infinito di soluzioni si può riscrivere

$$x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{4}$$

dove $k=0,1,2,3....$ La scrittura indica che le soluzioni si trovano, contando da 0, ogni 45°.

Esercizio 68. $y = 4\cos^2 x = 3$

Soluzione. Dividendo per 4, si ha

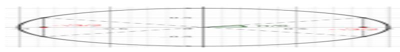
$$\cos^2 x = \frac{3}{4}$$

cioè

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

per cui

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, ...$$



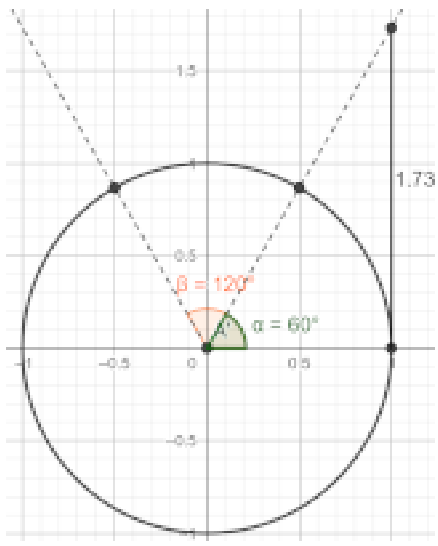
Esercizio 69. $\tan^2 x = 3$

Soluzione. Risolvendo

$$\tan x = \pm\sqrt{3}$$

per cui

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, ...$$



Esercizio 70. $\sin\frac{x}{3} = 1$

Soluzione. Il seno assume il valore 1 una sola volta in ogni periodo in corrispondenza dell'angolo di 90°, per cui

$$\frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

dove $2k\pi$ tiene conto della periodicità della funzione;

$$x = \frac{3}{2}\pi + 6k\pi$$

Esercizio 71. $\sin x = \sin 2x$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$

SOLUZIONE. Applichiamo la formula di duplicazione e portiamo tutto a primo membro

$$\sin x - 2\sin x\cos x = 0$$

raccogliamo

$$\sin x\,(1 - 2\cos x) = 0$$

avremo quindi

$$\sin x = 0 \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

Il seno di annulla per $x = 0, \pi, 2\pi$; mentre

$$\cos x = \frac{1}{2} \qquad x = \pm\frac{\pi}{3}$$

ricordiamo infatti che il coseno è positivo nel primo e quarto quadrante $\left(-\frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi\right)$

ESERCIZIO 72. $\sin x = \cos 2x$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$

SOLUZIONE. Applichiamo la formula di duplicazione e portiamo tutto a primo membro

$$\sin x - 1 + 2\sin^2 x = 0$$

equazione di secondo grado in $\sin x$, per cui, applicando la formula risolutiva delle eq. di 2° grado

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{array}{c} -1 \\ \frac{1}{2} \end{array}$$

avremo quindi

$$\sin x = -1 \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

ma $\sin x = -1$ per $x = \frac{3}{2}\pi$; mentre

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

ricordiamo infatti che il seno è positivo nel primo e secondo quadrante e i due angoli sono supplementari.

ESERCIZIO 73. $\sin(45° - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

SOLUZIONE. Non è necessario (è anzi algebricamente controproducente applicare la formula di addizione); basta ricordare per quali angoli il seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$45° - x = \begin{array}{c} 60° + k360° \\ 120° + k360° \end{array}$$

pertanto il valore di x nei due casi sarà

$$\begin{array}{c} x = -15° + k360° \\ x = -75° + k360° \end{array}$$

ESERCIZIO 74. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

SOLUZIONE. Non è necessario (è anzi algebricamente controproducente applicare la formula di addizione); basta ricordare per quali angoli il seno vale $-\frac{1}{2}$

$$2x + \frac{\pi}{6} = \begin{array}{c} \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \\ \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \end{array}$$

pertanto il valore di x nei due casi sarà

$$\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{7}{12}\pi + k\pi \end{array}$$

Esercizio 75. $\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin 3x$

Soluzione. Non è necessario (è anzi algebricamente controproducente applicare la formula di addizione); in questo caso ricordiamo che la funzione seno presenta valori uguali quando gli angoli sono uguali oppure sono tra loro supplementari

1° caso: angoli uguali

$$x+\frac{2\pi}{3}=3x+2k\pi$$

pertanto

$$2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$
$$x=\frac{\pi}{3}+k\pi$$

2° caso: angoli supplementari

$$x+\frac{2\pi}{3}+3x=\pi+2k\pi$$

da cui

$$4x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$
$$x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}$$

Esercizio 76. $\cos(2x-45°)=\cos(x+30°)$

Soluzione. Ricordiamo che la funzione coseno presenta valori uguali quando gli angoli sono uguali oppure sono tra loro esplementari (la loro somma è pari a 360°)

1° caso: angoli uguali

$$2x-45°=x+30°+k360°$$

pertanto

$$x=75°+k360°$$

2° caso: angoli esplementari

$$2x-45°+x+30°=360°+k360°$$

da cui

$$3x=345°+k360°$$
$$x=375°+k120°=15°+k120°$$

Esercizio 77. $\sin(40°+x)=\sqrt{3}\cos(40°+x)$

Soluzione. In questo caso abbiamo il confronto diretto tra due funzioni diverse ma con lo stesso argomento; possiamo sfruttare questa condizione, per ottenere una sola funzione, dividendo tutto per $\cos(40°+x)$ ponendo ovviamente la condizione che $\cos(40°+x)\neq 0$, cioè

$$C.E: \quad \cos(40°+x)\neq 0$$

$$40°+x\neq 90°+k180°$$

da cui

$$C.E: \quad x\neq 50°+k180°$$

poste le condizioni, dividiamo

$$\tan(40°+x)=\sqrt{3}$$

cioè

$$40°+x=60°+k180°$$
$$x=20°+k180°$$

la soluzione è quindi accettabile.

Equazioni contenenti una sola funzione goniometrica.

ESERCIZIO 78. Risolvere la seguente equazione

$$6\sin^2 x - 13\sin x + 5 = 0$$

SOLUZIONE. Questa equazione, se inizialmente consideriamo come incognita $\sin x$, può essere considerata una equazione di secondo grado (per rendersene conto, basta effettuare la sostituzione $\sin x = t$); avremo

$$6t^2 - 13t + 5 = 0$$

applicando la formula risolutiva

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{12} = \begin{array}{l} \frac{13-7}{12} = \frac{1}{2} \\ \frac{13+7}{12} = \frac{4}{3} \end{array}$$

il valore di $t = \frac{4}{3}$ non può essere accettato, perché la funzione seno è limitata tra $[-1; 1]$, per cui

$$\sin x = \tfrac{1}{2} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

ESERCIZIO 79. Risolvere la seguente equazione

$$4\sin^2 x - 2\left(1 - \sqrt{3}\right)\sin x - \sqrt{3} = 0$$

SOLUZIONE. Questa equazione, se inizialmente consideriamo come incognita $\sin x$, può essere considerata una equazione di secondo grado (per rendersene conto, basta effettuare la sostituzione $\sin x = t$); avremo

$$4t^2 - 2\left(1 - \sqrt{3}\right)t - \sqrt{3} = 0$$

applicando la formula ridotta

$$t = \frac{(1-\sqrt{3}) \pm \sqrt{1+3-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}}}{4} = \frac{(1-\sqrt{3}) \pm \sqrt{1+3+2\sqrt{3}}}{4} = \frac{(1-\sqrt{3}) \pm (1+\sqrt{3})}{4}$$

da cui

$$t = \tfrac{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad t = \tfrac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}$$

ricaviamo i valori di x

$$\sin x = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\sin x = \tfrac{1}{2} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

ESERCIZIO 80. Risolvere la seguente equazione

$$\tan^2 x - 4\tan x + 1 = 0$$

SOLUZIONE. Possiamo, volendo, anche evitare la sostituzione e considerare in prima istanza $\tan x$ come incognita e applicare la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado

$$t = 2 \pm \sqrt{4-1} = \begin{array}{l} 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} \end{array}$$

da cui

$$\tan x = 2 - \sqrt{3} \qquad \tan x = 2 + \sqrt{3}$$

ricaviamo i valori di x

$$\tan x = 2 - \sqrt{3} \qquad x = 15° + k180°$$

$$\tan x = 2 + \sqrt{3} \qquad x = 75° + k180°$$

ESERCIZIO 81. Risolvere la seguente equazione

$$\cos x + 2 - \frac{6}{\cos x + 2} = 1$$

Soluzione. Questa è una equazione fratta e richiede, pertanto, lo studio delle condizioni di esistenza, per garantire la ricerca di soluzioni che non annullino il denominatore.

$$C.E \quad \cos x + 2 \neq 0 \quad C.E. \quad \cos x \neq -2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

moltiplichiamo per il minimo comune multiplo applicando il secondo criterio di equivalenza delle equazioni (eseguo tutti i passaggi)

$$(\cos x + 2)^2 - 6 = \cos x + 2$$

da cui

$$\cos^2 x + 4\cos x + 4 - 6 - \cos x - 2 = 0$$
$$\cos^2 x + 3\cos x - 4 = 0$$

risolviamo

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{matrix} -4 \\ 1 \end{matrix}$$

la soluzione $\cos x = -4$ non è accettabile, perché -4 non può appartenere al codominio della funzione, per cui

$$\cos x = 1 \quad x = 2k\pi$$

Equazioni riconducibili a una sola funzione goniometrica.

Esercizio 82. Risolvere la seguente equazione

$$\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$$

Soluzione. Per risolvere queste equazioni è opportuno riscriverle con una sola funzione utilizzando le relazioni introdotte. In questo caso applichiamo la prima proprietà fondamentale per trasformare il seno in coseno

$$\cos x = 1 - \cos^2 x - \cos^2 x$$

da cui, portando tutto a primo membro e raccogliendo a fattor comune

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

ritroviamo una equazione riconducibile a una di 2° grado in $\cos x$; applicando la formula risolutiva

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$

per

$$\cos x = -1 \quad x = \pi + 2k\pi$$

e per

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Esercizio 83. Risolvere la seguente equazione

$$\sin x = \tan x$$

Soluzione. Applichiamo la definizione di tangente escludendo i valori per i quali diverge

$$\sin x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

da cui, svolgendo i calcoli

$$\sin x \cos x - \sin x = 0$$

raccogliamo a fattor comune

$$\sin x\,(\cos x - 1) = 0$$

risolviamo separatamente i due fattori

$$\sin x = 0 \qquad x = k\pi$$

e

$$\cos x = 1 \quad x = 2k\pi$$

le due soluzioni si possono riassumere in una sola $x = k\pi$.

Esercizio 84. Risolvere la seguente equazione

$$5 - 2\cos^2 x - 4\sin x = 2\cos^2 x$$

Soluzione. Per risolvere queste equazioni è opportuno riscriverle con una sola funzione utilizzando le relazioni introdotte. In questo caso applichiamo la prima proprietà fondamentale per trasformare il coseno in seno

$$5-2\left(1-\sin^2 x\right)-4\sin x-2\left(1-\sin^2 x\right)=0$$

da cui, sommando i termini simili

$$4\sin^2 x-4\sin x+1=0$$

questo è un prodotto notevole

$$(2\sin x-1)^2=0$$

per cui

$$\sin x=\frac{1}{2}\quad x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\quad x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

Esercizio 85. Risolvere la seguente equazione

$$\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\cos x\tan^2 x=2\tan x$$

Soluzione. Applichiamo la definizione di tangente escludendo i valori per i quali diverge

$$\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\cos x\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-2\frac{\sin x}{\cos x}=0$$

semplifichiamo e moltiplichiamo tutto per $\cos x$

$$\sqrt{3}\cos^2 x+\sqrt{3}\sin^2 x-2\sin x=0$$

ma, per la proprietà fondamentale, $\sqrt{3}\cos^2 x+\sqrt{3}\sin^2 x=\sqrt{3}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=\sqrt{3}$, per cui

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

cioè

$$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

Esercizio 86. Risolvere la seguente equazione

$$\cos x=\frac{4\sin x+1}{\cos(-x)}$$

Soluzione. ricordiamo che la funzione coseno è una funzione pari, cioè $\cos(-x)=\cos x$. L'equazione è fratta e quindi $C.E:\ \cos x\neq 0$, per cui $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. Rendiamo ora l'equazione intera

$$\cos^2 x=4\sin x+1$$

trasformiamo tutto in seno

$$1-\sin^2 x-4\sin x-1=0$$

cioè

$$\sin^2 x+4\sin x=0\qquad \sin x(\sin x+4)=0$$

il termine fra parentesi è impossibile perché il codominio della funzione seno è compreso tra -1 e 1, per cui

$$\sin x=0\quad x=k\pi$$

Esercizio 87. Risolvere la seguente equazione

$$4\sin x\cos^2 x-\sin x+1=0$$

Soluzione. Applichiamo la proprietà fondamentale

$$4\sin x\left(1-\sin^2 x\right)-\sin x+1=0$$

moltiplicando, sommando i termini simili e cambiando i segni

$$4\sin^3 x-3\sin x-1=0$$

per maggiore semplicità, sostituiamo $\sin x=t$

$$4t^3-3t-1=0$$

Applicando la regola di Ruffini, e osservando che si annulla per $t=1$, il polinomio si scompone in

$$(t-1)\left(4t^2+4t+1\right)=(t-1)(2t+1)=0$$

tornando al seno e considerando il primo fattore

$$\sin x=1 \qquad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

e il secondo fattore

$$\sin x=-\frac{1}{2} \quad x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi \quad x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$$

Esercizio 88. Risolvere la seguente equazione

$$2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos x-2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x=0$$

Soluzione. Osservando i coefficienti dei quattro termini, si può notare che è possibile effettuare un raccoglimento parziale

$$2\sin x(\cos x-\sin x)-\sqrt{3}(\cos x-\sin x)=0$$

da cui

$$(\cos x-\sin x)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0$$

Applichiamo la legge dell'annullamento del prodotto e consideriamo il primo fattore

$$\cos x-\sin x=0 \quad \sqrt{2}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=0 \quad \sqrt{2}\sin\left(45^\circ-x\right)=0$$

pertanto

$$\sin\left(45^\circ-x\right)=0 \quad 45^\circ-x=k\pi \quad x=45^\circ+k\pi$$

consideriamo ora il secondo fattore

$$\sin x=\tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad x=60^\circ+k360^\circ \quad x=120^\circ+k360^\circ$$

Equazioni contenenti funzioni di argomenti diversi.

Esercizio 89. Risolvere la seguente equazione

$$\cos\left(30^\circ+x\right)+\cos\left(30^\circ-x\right)=\frac{3}{2}$$

Soluzione. Applichiamo le formule di addizione e sottrazione

$$\cos 30^\circ\cos x\cancel{-\sin 30^\circ\sin x}+\cos 30^\circ\cos x\cancel{+\sin 30^\circ\sin x}=\frac{3}{2}$$

da cui

$$2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sqrt{3}\cos x=\frac{3}{2}$$

pertanto

$$\cos x=\tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad x=30^\circ+k360^\circ \quad x=-30^\circ\,(o\ 330^\circ)+k360^\circ$$

Esercizio 90. Risolvere la seguente equazione

$$\cos 2x+\sin^2 x=0$$

Soluzione. Riscriviamo applicando la formula di duplicazione per avere argomenti uguali
$$1-2\sin^2 x+\sin^2 x=0$$
da cui
$$\sin^2 x=1 \qquad \sin x=\pm 1$$
pertanto
$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Esercizio 91. Risolvere la seguente equazione
$$\tan 2x\cdot\cos x=3\sin x$$

Soluzione. Dividiamo per $\cos x\neq 0$ e avremo
$$\tan 2x-3\tan x=0$$
applichiamo la formula di duplicazione
$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}-3\tan x=0$$
pertanto ponendo $\tan x\neq\pm 1$
$$2\tan x-3\tan x+3\tan^3 x=0$$
cioè
$$3\tan^3 x-\tan x=\tan x\left(3\tan^2 x-1\right)=0$$
risolvendo il primo fattore
$$\tan x=0 \quad x=k\pi$$
e il secondo fattore
$$\tan^2 x=\tfrac{1}{3} \quad \tan x=\pm\tfrac{\sqrt{3}}{3} \quad x=\pm\tfrac{\pi}{6}+k\pi$$
le soluzioni sono tutte accettabili.

Esercizio 92. Risolvere la seguente equazione
$$2\cos^2\frac{x}{2}+\cos x=1$$

Soluzione. Applichiamo la formula di bisezione
$$2\frac{\cos x+1}{2}+\cos x=1$$
cioè
$$2\cos x=0$$
risolvendo
$$\cos x=0 \quad x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

Esercizio 93. Risolvere la seguente equazione
$$\sin^2\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos x=\frac{8-\sqrt{3}}{4}$$

Soluzione. Applichiamo la formula di bisezione
$$\frac{1-\cos x}{2}+\sqrt{3}\cos x=\frac{8-\sqrt{3}}{4}$$
rendiamo l'equazione intera
$$2-2\cos x+4\sqrt{3}\cos x=8-\sqrt{3}$$

svolgendo

$$2\cos x\left(2\sqrt{3}-1\right)=6-\sqrt{3}$$

da cui

$$\cos x=\frac{6-\sqrt{3}}{2\left(2\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\left(6-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)}{2\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)}=\frac{11\sqrt{3}}{22}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\quad x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

Esercizio 94. Risolvere la seguente equazione

$$4\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Soluzione. Applichiamo la formula di bisezione della tangente

$$4\sin^2\frac{x}{2}=\tan^2\frac{x}{2}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

rendiamo l'equazione intera

$$4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=0$$

raccogliendo

$$\sin^2\frac{x}{2}\left(4\cos^2\frac{x}{2}-1\right)=0$$

applichiamo la legge di annullamento del prodotto

$$\sin^2\tfrac{x}{2}=0\quad\frac{x}{2}=k\pi\quad x=2k\pi$$

ancora

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\frac{1}{2}\quad\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

Esercizio 95. Risolvere la seguente equazione

$$\frac{1-2\cos x}{1+\cos x}=\tan^2\frac{x}{2}$$

Soluzione. Applichiamo la formula di bisezione della tangente

$$\frac{1-2\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

rendiamo l'equazione intera ponendo $\cos x\neq-1$

$$1-2\cos x=1+\cos x$$

sommando i termini simili

$$3\cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Esercizio 96. Risolvere la seguente equazione

$$1-\cos x=\tan\frac{x}{2}$$

Soluzione. Non è qui conveniente l'applicazione della formula di bisezione perché trasformerebbe l'equazione in irrazionale. Useremo pertanto la formula di duplicazione per ottenere tutti gli angoli nella forma $\frac{x}{2}$. Nelle condizioni di esistenza avremo tutti i valori tranne quelli per i quali la tangente diverge.

$$1-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

applicando la proprietà fondamentale

$$2\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

da cui

$$2\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0$$

raccogliendo

$$\sin\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-1\right)=\sin\frac{x}{2}\cdot(\sin x-1)=0$$

e applicando la legge di annullamento del prodotto

$$\sin\tfrac{x}{2}=0\quad \tfrac{x}{2}=k\pi\quad x=2k\pi$$

l'altro fattore

$$\sin x=1\qquad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

Esercizio 97. Risolvere la seguente equazione

$$\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}=\sin\left(180°-x\right)$$

Soluzione. Non è qui conveniente l'applicazione della formula di bisezione perché trasformerebbe l'equazione in irrazionale. Useremo pertanto la formula di duplicazione. Ricordiamo prima che $\sin\left(180°-x\right)=\sin x$.

$$\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}=\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

da cui

$$\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

raccogliendo

$$\sin\frac{x}{2}\left(\sqrt{3}-2\cos\frac{x}{2}\right)=0$$

e applicando la legge di annullamento del prodotto

$$\sin\tfrac{x}{2}=0\quad \tfrac{x}{2}=k\pi\quad x=2k\pi$$

l'altro fattore

$$\cos\tfrac{x}{2}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\quad \tfrac{x}{2}=\pm\tfrac{\pi}{6}+2k\pi\quad x=\pm\frac{\pi}{3}+4k\pi$$

Esercizio 98. Risolvere la seguente equazione

$$3\sin x=\sqrt{3}\cos x$$

Soluzione. Un'equazione di questo tipo è detta lineare, cioè del tipo $ax+by+c=0$. Vi sono diversi modi per risolverli (le formule goniometriche non sono di grande aiuto).

Primo modo: introdurre la sostituzione $\cos x=X$ e $\sin x=Y$, mettendo poi a sistema l'equazione (che è come quella di una retta) che si ottiene dopo la sostituzione con l'equazione della circonferenza goniometrica $X^2+Y^2=1$

$$\begin{cases}\sqrt{3}X-3Y=0\\ X^2+Y^2=1\end{cases}\qquad\begin{cases}Y=\frac{\sqrt{3}}{3}X\\ X^2+\frac{1}{3}X^2=1\end{cases}\qquad\begin{cases}Y=\frac{\sqrt{3}}{3}X\\ X^2=\frac{3}{4}\end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases}Y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pm\dfrac{1}{2}\\ X=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

avremo quindi due punti nel piano della circonferenza goniometrica $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ e $Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ sostituendo a X e Y le funzioni goniometriche

$$P\left(\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2};\sin x=\frac{1}{2}\right)$$

il valore di x deve soddisfare contemporaneamente le due relazioni, per cui

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

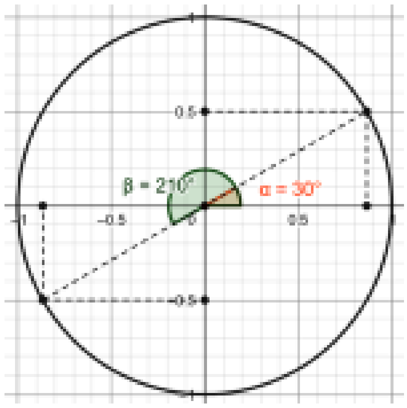
analogamente per Q

$$x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi$$

che si possono riassumere con

$$x=\frac{\pi}{6}+k\pi$$

Secondo modo: rappresentare nel piano cartesiano la circonferenza goniometrica e la retta e trovare le intersezione tra loro. Tale metodo è efficace quando i valori numerici corrispondono ad angoli noti.



Terzo metodo: utilizzo delle formule parametriche che consentono di esprimere tutte le funzioni attraverso la $\tan\frac{x}{2}=t$. Riproduciamo le formule

$$\sin x=\tfrac{2t}{1+t^2}\qquad\cos x=\tfrac{1-t^2}{1+t^2}$$

sostituendo nell'equazione assegnata avremo

$$\frac{6t}{1+t^2}=\sqrt{3}\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

rendendo l'equazione intera (escludendo i valori per cui la tangente diverge)

$$\sqrt{3}t^2+6t-\sqrt{3}=0$$

applicando la formula risolutiva ridotta

$$t=\frac{-3\pm\sqrt{9+3}}{\sqrt{3}}=\frac{-3\pm2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{-3\sqrt{3}\pm6}{3}=\begin{array}{c}-\sqrt{3}-2\\-\sqrt{3}+2\end{array}$$

da cui

$$\tan\tfrac{x}{2}=2-\sqrt{3}\quad\tfrac{x}{2}=15°+k180°\quad x=30°+k180°$$
$$\tan\tfrac{x}{2}=-2-\sqrt{3}\quad\tfrac{x}{2}=-75+k180°\quad x=-150+k180°\quad=30°+k180°$$

Esercizio 99. Risolvere la seguente equazione

$$4\sin x+3\cos x=3$$

Soluzione. Un'equazione di questo tipo è detta lineare, cioè del tipo $ax+by+c=0$. Risolviamo mediante le formule parametriche. Riproduciamo le formule

$$\sin x=\tfrac{2t}{1+t^2}\qquad\cos x=\tfrac{1-t^2}{1+t^2}$$

sostituendo nell'equazione assegnata avremo

$$\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}=3$$

rendendo l'equazione intera (escludendo i valori per cui la tangente diverge)

$$8t+3-3t^2-3-3t^2=0$$

cioè

$$6t^2-8t=0 \quad t\,(3t-4)=0 \quad t_1=0 \quad t_2=\frac{4}{3}$$

da cui

$$\tan\tfrac{x}{2}=0 \quad \tfrac{x}{2}=k\pi \quad x=2k\pi$$

$$\tan\tfrac{x}{2}=\frac{4}{3} \quad \tfrac{x}{2}=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)+k\pi \quad x=2\arctan\left(\frac{4}{3}\right)+2k\pi$$

Esercizio 100. Risolvere la seguente equazione

$$\cos x-\sin x=1$$

Soluzione. In questo caso possiamo utilizzare le formule di addizione e sottrazione, ricordando che $\cos 45°=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=1$$

per cui

$$\sqrt{2}\cos\left(x+45°\right)=1$$

ossia

$$\cos\left(x+45°\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

da cui

$$x+45°=\pm45°+k360° \quad x=k360° \quad x=-90°\,(270°)+k360°$$

Esercizio 101. Risolvere la seguente equazione

$$2\sin x+\tan x=1+2\cos x$$

Soluzione. Applichiamo la definizione di tangente (considerando gli angoli per i quali è definita)

$$2\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}=1+2\cos x$$

per cui

$$2\sin x\cos x+\sin x-\cos x-2\cos^2 x=0$$

applichiamo il raccoglimento parziale

$$\sin x\,(2\cos x+1)-\cos x\,(2\cos x+1)=0$$

$$(2\cos x+1)(\sin x-\cos x)=0$$

applichiamo la legge dell'annullamento del prodotto

primo fattore

$$\cos x=-\tfrac{1}{2} \quad x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi$$

secondo fattore

$$\sin x=\cos x \quad x=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

Esercizio 102. Risolvere la seguente equazione

$$3\sin^2 x-\cos^2 x=0$$

Soluzione. Queste equazioni sono dette omogenee presentando tutti i termini con lo stesso grado; risolviamo dividendo per $\cos^2 x\neq 0$.

$$3\tan^2 x=1$$

per cui

$$\tan x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

da cui

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$$

Esercizio 103. Risolvere la seguente equazione

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$$

Soluzione. Equazione omogenea; risolviamo dividendo per $\cos^2 x \neq 0$.

$$\tan^2 x + 2\tan x - 3 = 0$$

questa è un'equazione di secondo grado rispetto alla tangente; applichiamo la formula risolutiva ridotta

$$\tan x = -1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{array}{c} -3 \\ 1 \end{array}$$

per cui

$$\tan x = -3 \quad x = -\arctan 3 + k\pi$$

$$\tan x = 1 \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Esercizio 104. Risolvere la seguente equazione

$$\left(\sqrt{2}+1\right)\sin^2 x + \left(\sqrt{2}-1\right)\cos^2 x + 2\sin x\cos x = \sqrt{2}$$

Soluzione. Equazione riconducibile ad omogenea

$$\left(\sqrt{2}+1\right)\sin^2 x + \left(\sqrt{2}-1\right)\cos^2 x + 2\sin x\cos x = \sqrt{2}\sin^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x$$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$$

$$\tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0$$

questa è un'equazione di secondo grado rispetto alla tangente; applichiamo la formula risolutiva ridotta

$$\tan x = -1 \pm \sqrt{1+1} = \begin{array}{c} -1-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \end{array}$$

per cui

$$\tan x = -1-\sqrt{2} \quad x = -67,5^\circ + k\pi$$

$$\tan x = -1+\sqrt{2} \quad x = 22,5^\circ + k\pi$$

Esercizio 105. Risolvere la seguente equazione

$$\frac{1-\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x} = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$$

Soluzione. Equazione fratta, per cui

$$C.E \quad \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ 1+\cos 2x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq k\pi \\ \cos 2x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

applichiamo le formule di bisezione e duplicazione

$$\frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2}\sin x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}$$

semplificando

$$\sqrt{2}\sin x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

moltiplichiamo per il mcm

$$\sqrt{2}\sin x\cos x - \sin x = 0$$

raccogliendo

$$\sin x\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right) = 0$$

per cui

$$\sin x = 0 \quad x = k\pi$$

non accettabile per $C.E$, ma

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Esercizio 106. Risolvere la seguente equazione

$$\tan 2x \tan x = \tan 2x - \tan x - 1$$

Soluzione. spostiamo tutto al primo membro e raccogliamo

$$\tan 2x (\tan x - 1) - (\tan x - 1) = 0$$

$$(\tan 2x - 1)(\tan x - 1) = 0$$

per cui

$$\tan 2x = 1 \quad 2x = \tfrac{\pi}{4} + k\pi \quad x = \tfrac{\pi}{8} + k\tfrac{\pi}{2}$$

e

$$\tan x = 1 \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Esercizio 107. Determinare il valore del parametro a per il quale l'equazione

$$\sin^2 x + a \sin x \cos x = 0$$

è soddisfatta per $x = 45°$

Soluzione. sostituiamo il valore assegnato dell'angolo

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

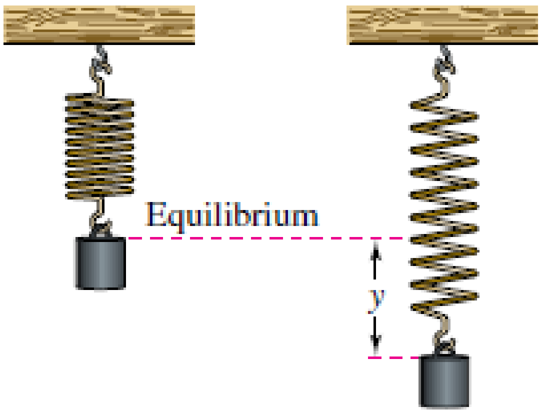
per cui

$$a = -1$$

Esercizio 108. Un peso oscilla all'estremità di una molla (vedi figura). Lo spostamento dall'equilibrio del peso rispetto al punto di equilibrio è dato da

$$y = \frac{1}{12}(\cos 8t - 3 \sin 8t)$$

dove y è lo spostamento (in metri) e t è il tempo (in secondi). Trova gli istanti in cui il peso si trova nel punto di equilibrio ($y = 0$) per $0 \le t \le 1$.



Soluzione. Sostituendo si ha

$$\cos 8t - 3 \sin 8t = 0$$

dividiamo per $\cos 8t$, considerato diverso da zero, e si ottiene

$$1 - 3 \tan 8t = 0 \quad \tan 8t = \tfrac{1}{3}$$

$$8t = \arctan \frac{1}{3} = 18,4°$$

da cui

$$t = \frac{15,4}{8} = 2,3°$$

Equazioni esponenziali e logaritmiche aventi per esponenti e/o argomenti delle funzioni esponenziali.

ESERCIZIO 109. Risolvere la seguente equazione esponenziale

$$3 \cdot 9^{\cos x} = 3^{\sin x}$$

SOLUZIONE. risolviamo l'equazione, applicando le proprietà delle potenze, si può riscrivere come

$$3^{(2\cos x + 1)} = 3^{\sin x}$$

per cui

$$2\cos x + 1 = \sin x$$

equazione lineare. Risolviamo con le formule parametriche ($t = \tan \frac{x}{2}$)

$$2\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 = \frac{2t}{1+t^2}$$

moltiplicando per il mcm

$$2 - 2t^2 + 1 + t^2 - 2t = 0$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

ricordando le proprietà delle soluzioni di un'equazione di 2° grado, abbiamo $t_1 = -3$ e $t_2 = 1$ per cui

$$\tan \tfrac{x}{2} = -3 \quad \tfrac{x}{2} = -\arctan 3 + k\pi \quad x = -2\arctan 3 + 2k\pi$$

$$\tan \tfrac{x}{2} = 1 \quad \tfrac{x}{2} = \tfrac{\pi}{4} + k\pi \quad x = \tfrac{\pi}{2} + k\tfrac{\pi}{2}$$

ESERCIZIO 110. Risolvere la seguente equazione logaritmica

$$\frac{1}{2}\log 2 + \log \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\log \cos x$$

SOLUZIONE. Ricordiamo che l'argomento di un logaritmo non può essere negativo, per cui le funzioni goniometriche dovranno essere considerate con codominio $(0; 1]$.

$$\begin{cases} 0 < \sin \frac{x}{2} \le 1 \\ 0 < \cos x \le 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < \frac{x}{2} \le \pi \\ 0 \le x < \frac{\pi}{2} \quad \frac{3}{2}\pi \le x < 2\pi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x \le 2\pi \\ 0 \le x < \frac{\pi}{2} \quad \frac{3}{2}\pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

per cui le soluzioni dovranno riguardare angoli del primo e quarto quadrante esclusi $k\pi$.

Risolviamo l'equazione, applicando le proprietà dei logaritmi, si può riscrivere come

$$\log\left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right) = \log\sqrt{\cos x}$$

per cui

$$\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\cos x}$$

eleviamo tutto al quadrato

$$2\sin^2\frac{x}{2} = \cos x$$

applicando la formula di bisezione

$$1 - \cos x - \cos x = 0 \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

per cui

$$x = \pm\frac{\pi}{3} \pm 2k\pi$$

soluzioni accettabili perché angoli nel primo e quarto quadrante.

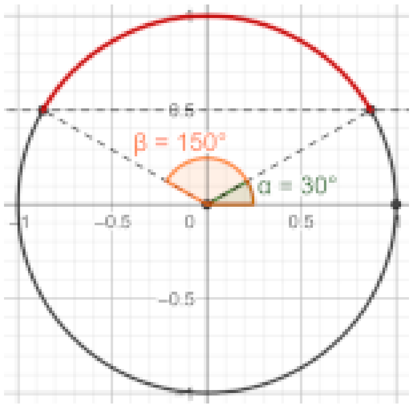
Disequazioni goniometriche

Disequazioni elementari.

Esercizio 111. Determina i valori di x che verificano la relazione seguente, con $[0; 2\pi]$
$$\sin x > \frac{1}{2}$$

Soluzione. la funzione seno è positiva nei primi due quadranti e assume il valore $\frac{1}{2}$ quando $x = 30°$ e $x = 150°$, l'angolo supplementare. La funzione è crescente nel primo quadrante tra 0 e 1 e decrescente nel secondo da 1 a 0. Pertanto la soluzione sarà
$$30° < x < 150°$$

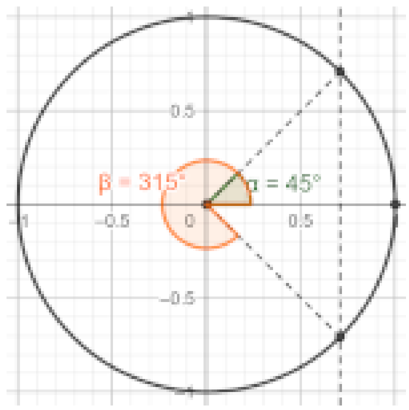
mostriamo il risultato graficamente



Esercizio 112. Determina i valori di x che verificano la relazione seguente, con $[0; 2\pi]$
$$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soluzione. la funzione coseno è positiva nel primo e quarto quadrante e assume il valore $\frac{\sqrt{2}}{2}$ quando $x = 45°$ e $x = 315°$, l'angolo esplementare. La funzione è decrescente nel primo quadrante tra 1 e 0 e crescente nel secondo da 0 a 1. Pertanto la soluzione sarà
$$0° \leq x \leq 45° \quad 315° \leq x \leq 360°$$

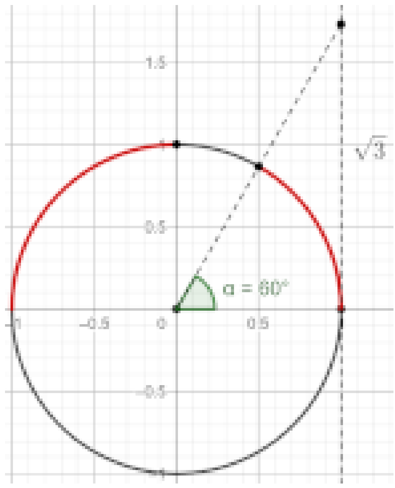
mostriamo il risultato graficamente



Esercizio 113. Determina i valori di x che verificano la relazione seguente, con $[0; \pi]$
$$\tan x \leq \sqrt{3}$$

Soluzione. la funzione tangente è positiva nel primo e negativa nel secondo quadrante e assume il valore $\sqrt{3}$ quando $x = 60°$. La funzione è crescente nel primo quadrante tra 0 e $+\infty$ e crescente nel secondo da $-\infty$ a 0. Pertanto la soluzione sarà
$$0° \leq x \leq 60°$$

mostriamo il risultato graficamente



ESERCIZIO 114. Risolvi la seguente disequazione elementare

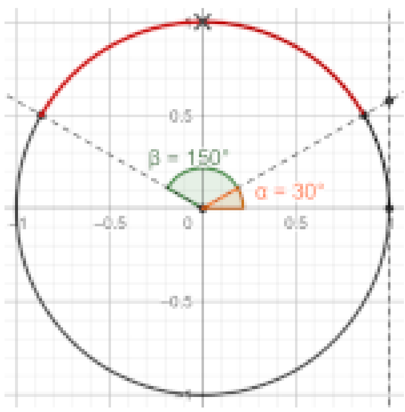
$$3\tan^2 x > 1$$

SOLUZIONE. la disequazione diventa e le soluzioni della disequazione di secondo grado in tangente saranno pertanto negli intervalli esterni

$$\tan^2 x > \tfrac{1}{3} \quad \tan x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \;\vee\; \tan x > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Le soluzioni rispetto a x saranno

$$\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi \quad \wedge \quad x \neq \frac{\pi}{2}$$



ESERCIZIO 115. Risolvi la seguente disequazione elementare

$$\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)\cos x < 0$$

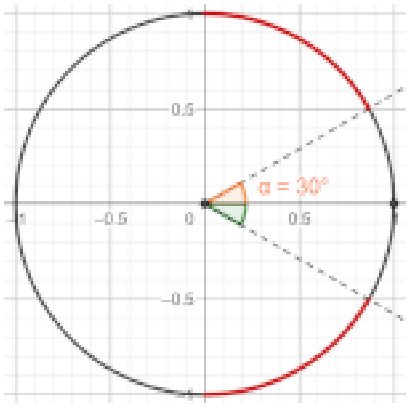
con $0 \leq x \leq 2\pi$

SOLUZIONE. La relazione ha le caratteristiche di una disequazione di secondo grado spuria. L'equazione associata si può facilmente rispondere e si annulla per $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e per $\cos x = 0$. Le soluzioni rispetto al $\cos x$ sono comprese nell'intervallo intervallo ai due valori

$$0 < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le soluzioni rispetto a x saranno, ricordando che il coseno è decrescente nel primo quadrante e crescente nel quarto

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \frac{3}{2}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$$



Esercizio 116. Risolvi la seguente disequazione fratta

$$\frac{\sin x}{\cos x+1}\geq 0$$

Soluzione. Lo studio del segno di una frazione richiede lo studio del numeratore e del denominatore per poi ottenere il segno della frazione stessa.

Numeratore

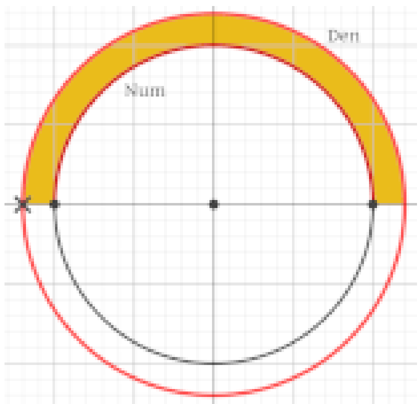
$$\sin x\geq 0\quad (0\leq x\leq \pi)+2k\pi$$

Denominatore

$$\cos x>-1\quad 0<x<2k\pi\quad x\neq \pi+2k\pi$$

Il segno della frazione sarà

$$0\leq x<\pi$$



Esercizio 117. Risolvi la seguente disequazione fratta

$$\frac{3}{2\cos x}-2\cos x\geq 0$$

con $0<x<2\pi$.

Soluzione. Lo studio del segno di una frazione richiede lo studio del numeratore e del denominatore per poi ottenere il segno della frazione stessa. Svolgiamo prima il calcolo per ottenere un'unica frazione

$$\frac{3-4\cos^2 x}{2\cos x}\geq 0$$

Numeratore

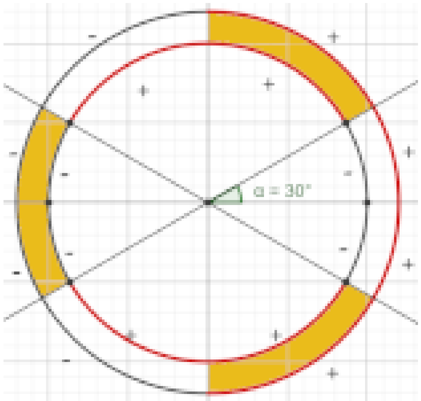
$$\cos^2 x\leq \frac{3}{4}\quad -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\leq \cos x\leq \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Denominatore

$$\cos x>0\quad 0<x<\tfrac{\pi}{2}\quad \tfrac{3}{2}\pi<x<2\pi$$

Il segno della frazione sarà

$$\tfrac{\pi}{6}\leq x<\tfrac{\pi}{2}\quad \tfrac{5}{6}\pi\quad \leq x<\tfrac{7}{6}\pi\quad \tfrac{3}{2}\pi<x\leq \tfrac{11}{6}\pi$$



Esercizio 118. Risolvi la seguente disequazione fratta

$$5\sin^2 x + \sin x + \cos^2 x > \frac{5}{2}$$

con $0 < x < 2\pi$.

Soluzione. La disequazione è di secondo grado rispetto a $\sin x$. Applicando la proprietà fondamentale si può riscrivere

$$5\sin^2 x + \sin x + 1 - \sin^2 x - \frac{5}{2} > 0$$

ossia sommando i termini simili e moltiplicando tutto per 2

$$8\sin^2 x + 2\sin x - 3 > 0$$

Applichiamo la formula risolutiva ridotta dell'equazione associata

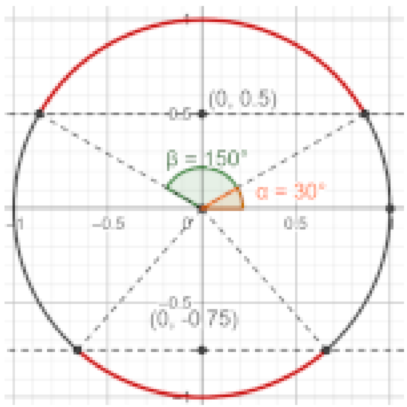
$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{8} = \begin{array}{c} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{array}$$

le soluzioni in $\sin x$ saranno contenute negli intervalli esterni a queste radici

$$\sin x < -\frac{3}{4} \qquad \sin x > \frac{1}{2}$$

i valori di x saranno

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi \quad \pi + \arcsin\frac{3}{4} < x < 2\pi - \arcsin\frac{3}{4}$$



Esercizio 119. Risolvi la seguente disequazione fratta

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x < 3\cos^2 x$$

con $0 < x < 2\pi$.

Soluzione. La disequazione è di tipo omogeneo. Dividiamo pertanto per $\cos^2 \neq 0$. Avremo

$$\tan^2 x + 2\tan x - 3 < 0$$

ossia, un'equazione di secondo grado in tangente

Applichiamo la formula risolutiva ridotta dell'equazione associata

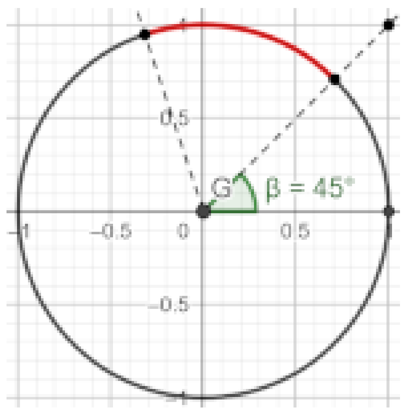
$$\tan x = -1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix}$$

le soluzioni in $\tan x$ saranno contenute nell'intervallo interno alle due radici

$$-3 < \tan x < 1$$

i valori di x saranno

$$\pi - \arctan 3 < x < \pi + \frac{\pi}{4}$$



Esercizio 120. Risolvi la seguente disequazione fratta

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x > 0$$

con $0 < x < 2\pi$.

Soluzione. La disequazione è di tipo lineare, ma possiamo risolverla più facilmente attraverso le formule di addizione e/o sottrazione.

$$2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) > 0$$

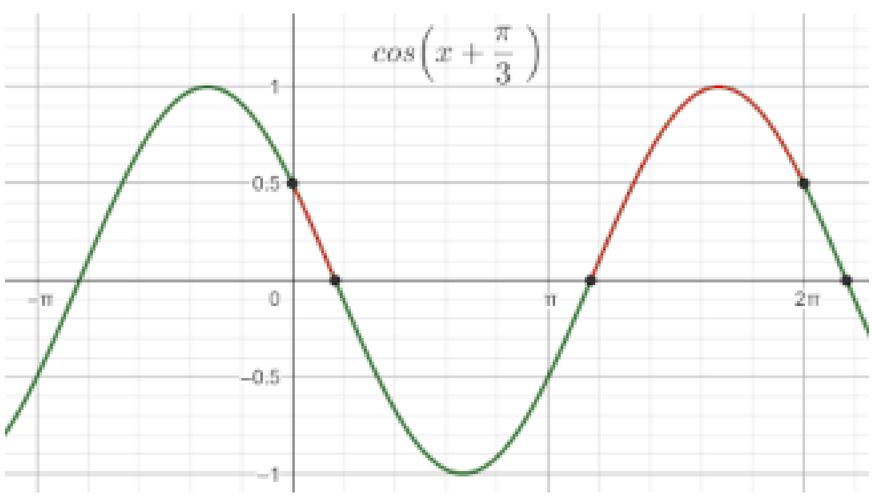
che si può riscrivere come

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$$

i valori di x saranno

$$0 < x < \tfrac{\pi}{6} \quad \tfrac{7}{6}\pi \quad < x < 2\pi$$

La figura sotto mostra la possibilità di ottenere le soluzioni anche attraverso il grafico della funzione. In questo caso la funzione coseno è traslata verso sinistra di $\frac{\pi}{3}$.



Equazioni e disequazioni trascendenti

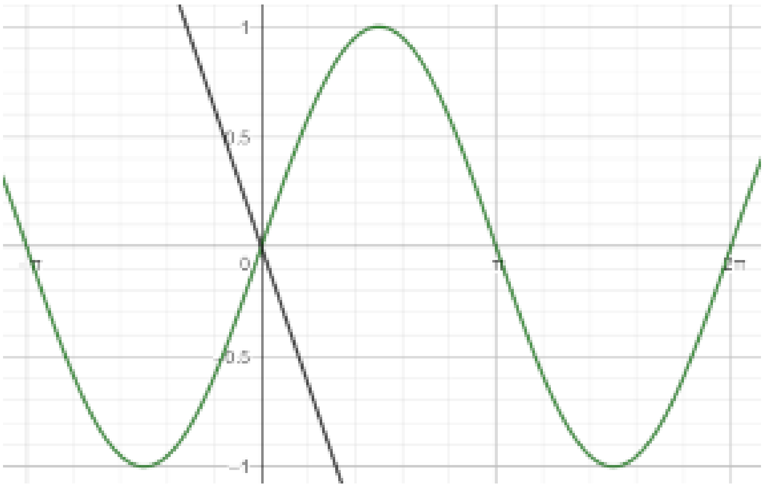
ESERCIZIO 121. Risolvi graficamente la seguente equazione trascendente

$$x + \sin x = 0$$

SOLUZIONE. Riscrivendo l'equazione come

$$\sin x = -x$$

In questo caso non esiste un procedimento algebrico in grado di risolvere tale equazione; una possibilità è offerta dalla possibilità di determinare graficamente le intersezioni, se esistono, tra le curve di equazione $y = \sin x$ e $y = -x$, dopo aver posto $y = \sin x$. I due grafici sono facilmente rappresentabili con una funzione sinusoidale e la bisettrice del secondo e quarto quadrante (le unità di misura dei due assi cartesiani sono diverse).



Dal grafico si vede facilmente che l'unica soluzione è per $x = 0$.

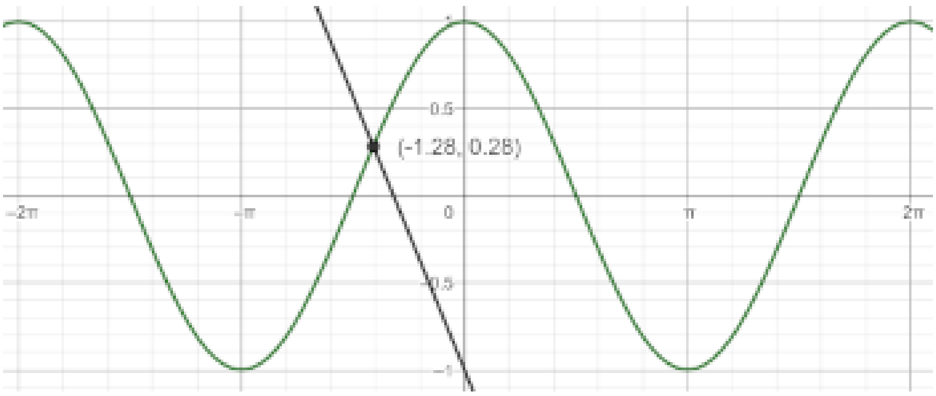
ESERCIZIO 122. Risolvi graficamente la seguente equazione trascendente

$$\cos x + x + 1 = 0$$

SOLUZIONE. Riscrivendo l'equazione come

$$\cos x = -x - 1$$

Poniamo $y = \cos x$ e quindi $y = -x - 1$. I due grafici sono facilmente rappresentabili con una funzione coseno e una retta (le unità di misura dei due assi cartesiani sono diverse).



L'intersezione è mostrata in figura. (Ovviamente l'uso di software facilita l'individuazione del valore numerico. In figura è espresso in radianti). Il valore numerico della soluzione si può indicare in prima approssimazione compreso tra $-\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{2}$.

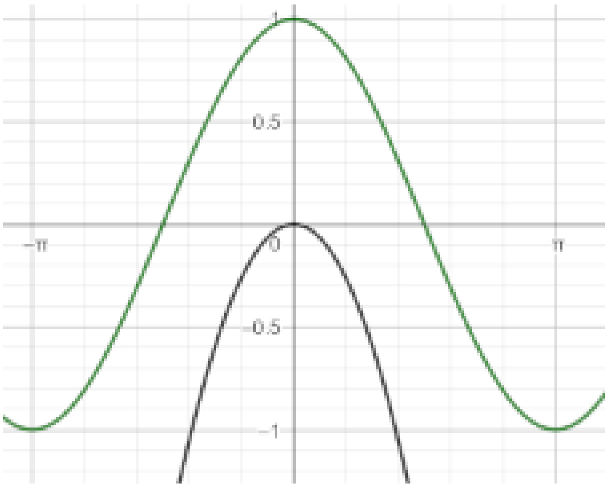
ESERCIZIO 123. Risolvi graficamente la seguente equazione trascendente

$$2x^2 + 3\cos x = 0$$

Soluzione. Riscrivendo l'equazione come

$$\cos x = -\frac{2x^2}{3}$$

Poniamo $y = \cos x$ e quindi $y = -\frac{2x^2}{3}$. I due grafici sono facilmente rappresentabili con una funzione coseno e una parabola con vertice nell'origine (del tipo $y = ax^2$ con $a = -\frac{2}{3}$ e quindi concavità rivolta verso il basso).



In questo caso l'equazione è impossibile, non essendoci alcuna intersezione.

Esercizio 124. Risolvi graficamente la seguente equazione trascendente

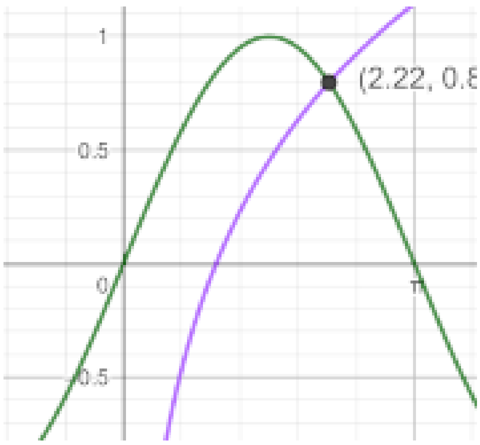
$$\ln x - \sin x = 0$$

con $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Soluzione. Riscrivendo l'equazione come

$$\sin x = \ln x$$

I due grafici sono facilmente rappresentabili con una funzione seno e una funzione logaritmica di base e.



L'equazione ammette una sola soluzione con $x \cong 2,22\,rad \cong 127°$; si può considerare compresa tra $\frac{2}{3}\pi$ e $\frac{3}{4}\pi$. In questi esercizi, ciò che conta è saper disegnare correttamente le funzioni e individuare graficamente con buona precisione le eventuali intersezioni.

Esercizio 125. Risolvi graficamente la seguente disequazione trascendente

$$2\sin x + x - 3 < 0$$

con $x \in [0; 2\pi]$

SOLUZIONE. Riscrivendo la disequazione come

$$2\sin x < 3 - x$$

I due grafici sono facilmente rappresentabili con una funzione seno dilatata verticalmente [codominio: $[-2;2]$ e una retta.

La disequazione ammette come soluzione gli intervalli segnati in rosso in figura. [banalizzando, si vede che i valori della ordinata relativi alla retta sono maggiori di quelli della funzione seno per gli stessi valori di x).

ESERCIZIO 126. Risolvi graficamente la seguente disequazione trascendente

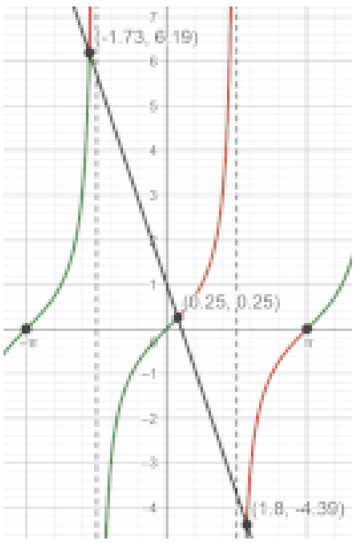
$$1 - 3x - \tan x \leq 0$$

con $x \in [-\pi;\pi]$

SOLUZIONE. Riscrivendo la disequazione come

$$1 - 3x \leq \tan x$$

I due grafici sono facilmente rappresentabili con una funzione tangente e una retta.



La disequazione ammette come soluzione gli intervalli segnati in rosso in figura.

ESERCIZIO 127. Risolvi graficamente la seguente disequazione trascendente

$$\sin x - \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$$

con $x \in [0;2\pi]$

Soluzione. Riscrivendo la disequazione come

$$\sin x > \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

I due grafici sono facilmente rappresentabili con una funzione seno e una funzione esponenziale del tipo a^{-x} con $a = 2$.

La disequazione ammette come soluzione l'intervallo segnato in rosso in figura.

CAPITOLO 3

Relazioni tra lati e angoli di un triangolo

Breve riassunto degli aspetti teorici. Ricordiamo le seguenti proprietà fra lati e angoli di un triangolo:
(1) La somma degli angoli interno è uguale a un angolo piatto: $\alpha+\beta+\gamma=\pi$
(2) Ogni lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza
(3) La stessa relazione (2) vale anche per gli angoli opposti ai lati, cioè se $a \lesseqgtr b$ allora $\alpha \lesseqgtr \beta$.

Triangoli rettangoli

Teorema. - *In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o per il coseno dell'angolo adiacente.*

$$\begin{array}{ll} b=a\sin\beta & c=a\sin\gamma \\ b=a\cos\gamma & c=a\cos\beta \end{array}$$

Teorema. *In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto.*

$$b=c\tan\beta \quad c=b\tan\gamma$$

e quindi il rapporto tra due cateti è uguale alla tangente dell'angolo opposto al primo cateto (al numeratore della frazione).

Proprietà derivante dai teoremi. L'area di un triangolo qualsiasi è data dal semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Esercizio 128. Senza l'uso della calcolatrice, risolvi il triangolo rettangolo in cui $a=14$ e $\beta=30°$. $(\alpha=90°)$

Soluzione. Per convenzione con a si intende la misura dell'ipotenusa e con β l'ampiezza dell'angolo opposto al cateto b. Pertanto, per i teoremi precedenti

$$b=a\sin\beta=14\cdot\sin 30°=7$$

$$c=a\cos\beta=14\cdot\cos 30°=7\sqrt{3}$$

l'angolo $\gamma=60°$ (infatti $\beta+\gamma=90°$).

Esercizio 129. Risolvere un triangolo rettangolo conoscendo $a=4$ e $b=2\sqrt{2}$.

Soluzione. Non usiamo il teorema di Pitagora (cosa peraltro possibile), ma la formula inversa del teorema presentato per ottenere l'angolo opposto al cateto b

$$\sin\beta=\tfrac{b}{a} \quad \beta=\arcsin\tfrac{2\sqrt{2}}{4} \quad \beta=45°$$

di conseguenza anche $\gamma=45°$; il triangolo è quindi isoscele e $c=b=2\sqrt{2}$.

Esercizio 130. Del triangolo ABC, retto in A, si conosce l'ipotenusa $BC=36\,cm$ e l'angolo $\widehat{B}=75°$. Determinare il perimetro e l'area del triangolo ABC.

Soluzione. L'angolo $\widehat{B}=45°+30°$ per cui

$$\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\sin 30°\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

pertanto

$$AC=BC\sin(45°+30°)=9\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

ma $\widehat{C} = 15° = 45° - 30°$, e

$$\sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

pertanto

$$AB = BC \sin(45° - 30°) = 9\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

Troviamo ora il perimetro del triangolo

$$2p = 36 + 9\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1\right) = 36 + 18\sqrt{6} = 18\left(2 + \sqrt{6}\right)\, cm$$

Troviamo ora l'area

$$A_{ABC} = 9\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right) \times 9\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) \times \frac{1}{2} = 162\, cm^2$$

Esercizio 131. Determinare il perimetro di un triangolo rettangolo, sapendo che l'area è di $24\, cm^2$ e $\tan\beta = \frac{3}{4}$.

Soluzione. Ricordiamo che $\tan\beta = \frac{b}{c}$, dove b è il cateto opposto all'angolo e c è l'altro cateto. Inoltre sappiamo che l'area è ottenibile come il semi prodotto dei due cateti, cioè $\frac{bc}{2}$. Quindi pertanto

$$\begin{cases} \frac{3}{4} = \frac{b}{c} \\ 24 = \frac{bc}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{3}{4}c \\ 24 = \frac{c}{2} \cdot \frac{3}{4}c \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{3}{4}c \\ c^2 = 64 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 6 \\ c = 8 \end{cases}$$

in questo caso, invece di applicare le procedure goniometriche indubbiamente più lunghe, ci basta osservare che i numeri $6, 8$ fanno parte della terna pitagorica $6, 8, 10$ e il perimetro sarà

$$2p = 10 + 8 + 6 = 24\, cm$$

Esercizio 132. Determinare il perimetro di un triangolo rettangolo, sapendo che l'area è di $72\sqrt{3}\, cm^2$ e i suoi angoli acuti sono uno doppio dell'altro.

Soluzione. I due angoli acuti sono tra loro complementari ($\beta + \gamma = 90°$), per cui se poniamo $\beta = 2\gamma$, avremo $3\beta = 90°$ e $\beta = 30°$ e $\gamma = 60°$. Il triangolo sarà pertanto la metà di un triangolo equilatero. Se indichiamo con b il cateto opposto all'angolo di $30°$, esso sarà la metà della base del triangolo equilatero, cioè dell'ipotenusa del triangolo rettangolo, per cui

$$\frac{b}{c} = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ma anche

$$bc = 144\sqrt{3}$$

per cui

$$\frac{\sqrt{3}}{3}c^2 = 144\sqrt{3}$$

cioè, considerando solo la soluzione positiva, trattandosi di una lunghezza,

$$c^2 = 432 \quad c = 12\sqrt{3}$$

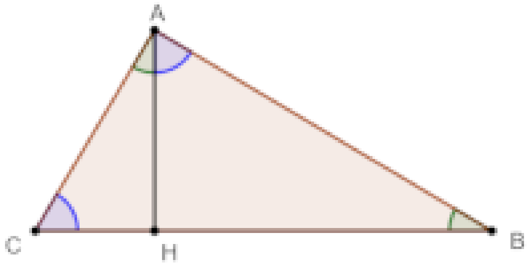
$$b = 12\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 12$$

$$a = 2b = 24$$

e il perimetro è

$$2p = 36 + 12\sqrt{3} = 12\left(3 + \sqrt{3}\right)$$

Esercizio 133. Determinare il perimetro del triangolo rettangolo ABC sapendo che, detta H la proiezione sull'ipotenusa BC del vertice A, è $AH = 180\, cm$ e che $\cos A\widehat{C}B = \frac{12}{13}$.



Soluzione. Poniamo $A\widehat{B}C = \beta$ e $A\widehat{C}B = \gamma$. L'angolo $\gamma = 90° - \beta$, per cui $\cos\beta = \cos(90° - \gamma) = \sin\gamma = \frac{5}{13}$. Applicando i teoremi sui triangoli rettangoli

$$AC = \frac{AH}{\sin\gamma} = \frac{180 \times 13}{5} = 468$$

ma anche

$$AB = \frac{AH}{\cos\gamma} = \frac{180 \times 13}{12} = 195$$

per cui

$$BC = \frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{195 \times 13}{5} = 507$$

e il perimetro è

$$2p = 468 + 195 + 507 = 1170\,cm$$

Esercizio 134. Di un triangolo rettangolo sappiamo che $\sin\beta = \frac{3}{5}$ e che la differenza tra l'ipotenusa e il cateto opposto all'angolo β è $2\,cm$. Determinare il perimetro e l'area del triangolo.

Soluzione. Gli angoli β e γ sono complementari, pertanto $\sin\gamma = \cos\beta = \frac{4}{5}$. Avremo

$$b = a\sin\beta = \frac{3}{5}a$$

ma anche

$$c = a\sin\gamma = \frac{4}{5}a$$

per cui

$$a - \frac{3}{5}a = 2$$

da cui

$$a = 5\,cm$$

e $b = 3\,cm$ e $c = 4\,cm$. Il perimetro sarà

$$2p = 3 + 4 + 5 = 12\,cm$$

e l'area

$$A = \frac{1}{2}bc = 6\,cm^2$$

Esercizio 135. Nel triangolo isoscele ABC, la base AB è lunga $28\,cm$ e l'altezza $CH = 48\,cm$. Determinare il coseno dell'angolo $A\widehat{B}C$, angolo alla base, il seno dell'angolo $A\widehat{C}B$, angolo al vertice, e l'altezza AK relativa al lato BC.

Soluzione. La metà della base AB del triangolo è $HB = AH = 14\,cm$. Pertanto

$$\frac{CH}{HB} = \tan A\widehat{B}C = \frac{24}{7}$$

e ricordando la relazione tra la tangente e il coseno ($\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$) avremo

$$\cos A\widehat{B}C = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{576}{49}}} = \frac{7}{25}$$

analogamente

$$\frac{HB}{CH} = \tan\frac{A\widehat{C}B}{2} = \frac{7}{24}$$

da cui

$$\sin\frac{A\widehat{C}B}{2}=\sqrt{\frac{\tan^2\frac{A\widehat{C}B}{2}}{1+\tan^2\frac{A\widehat{C}B}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{49}{576}}{1+\frac{49}{576}}}=\frac{7}{25}$$

e

$$\cos\frac{A\widehat{C}B}{2}=\sqrt{1-\frac{49}{625}}=\frac{24}{25}$$

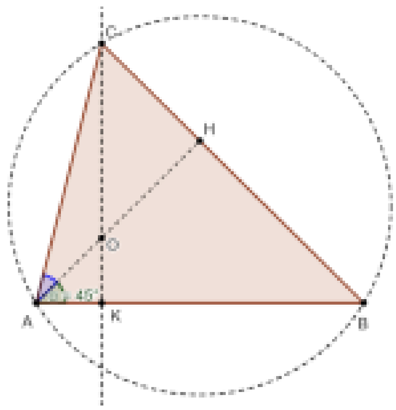
e per le formule di duplicazione

$$\sin A\widehat{C}B=2\sin\frac{A\widehat{C}B}{2}\cos\frac{A\widehat{C}B}{2}=2\times\frac{7}{25}\times\frac{24}{25}=\frac{336}{625}$$

troviamo ora l'altezza relativa al lato BC, lato obliquo:

$$AK=AB\sin A\widehat{B}C=28\times\frac{24}{25}=26,88\,cm$$

Esercizio 136. In un triangolo acutangolo ABC, si tracci l'altezza AH. Sapendo che $B\widehat{A}H=45°$, che $\cos C\widehat{A}H=\frac{4}{5}$ e che l'ortocentro O del triangolo dista 1 da A, si determinino, senza l'uso della calcolatrice, $\cos B\widehat{A}C$, le misure dei lati del triangolo e dei segmenti BO, OC.



Soluzione. Il triangolo HAB è rettangolo e isoscele, per cui $AH=HB$. Se tracciamo l'altezza CK relativa al lato AB, poiché $OA=1$, allora $OK=AK=\frac{\sqrt{2}}{2}$. La somma dei due angoli assegnati nel testo del problema danno l'angolo $\widehat{A}$. Pertanto

$$\cos B\widehat{A}C=\cos\left(B\widehat{A}H+C\widehat{A}H\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Applichiamo il teorema al triangolo AKC e avremo

$$AC=\frac{AK}{\cos B\widehat{A}C}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{10}}=5$$

pertanto

$$AH=AC\cos C\widehat{A}H=5\times\frac{4}{5}=4$$

$$CH=AC\sin C\widehat{A}H=5\times\frac{3}{5}=3$$

consideriamo ora il triangolo AHB

$$HB=AH=4$$

e

$$AB=4\sqrt{2}$$

e il terzo lato

$$BC=CH+HB=7$$

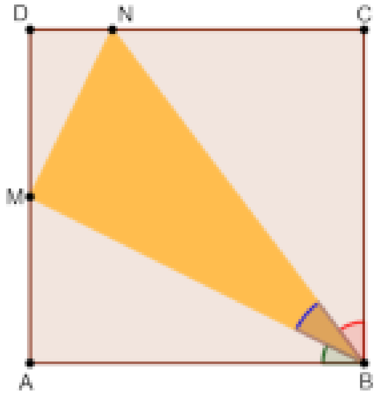
Troviamo ora i segmenti BO e OC. I triangoli BOK e COH sono angoli rettangoli; inoltre l'angolo $H\widehat{O}C=45°$ essendo opposto al vertice dell'angolo $A\widehat{O}K$ e quindi anche il triangolo COH è isoscele e $OH=4-1=3$, per cui

$$CO=3\sqrt{2}$$

per trovare BO il modo più semplice è utilizzare il th. di Pitagora sapendo che $OK = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $KB = AB - AK = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, per cui

$$BO = \sqrt{\frac{1}{2} + 18} = \sqrt{\frac{37}{2}}$$

Esercizio 137. In un quadrato $ABCD$ si consideri sul lato AD il punto medio M tale che $\sin A\widehat{B}M = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e sul lato CD il punto N tale che $\tan N\widehat{B}C = \frac{3}{4}$. Sapendo che il lato del quadrato misura 8, trovare il perimetro e l'area del triangolo MBN; il $\sin M\widehat{B}N$ dopo aver verificato che il triangolo MBN è rettangolo.



Soluzione. Il quadrato è diviso nel triangolo MBN e in altri tre triangoli rettangoli che hanno per ipotenusa rispettivamente i tre lati del triangolo MBN. Consideriamo il tr. rettangolo BAM: il cateto $AB = 8$ e

$$MB = \frac{AB}{\cos A\widehat{B}M}$$

ma

$$\cos A\widehat{B}M = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = 2\frac{\sqrt{5}}{5}$$

inoltre

$$MB = \frac{8}{2\frac{\sqrt{5}}{5}} = 4\sqrt{5}$$

$$AM = 4\sqrt{5} \sin A\widehat{B}M = 4\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 4$$

quindi M è il punto medio del lato AD. Troviamo ora BN calcolando prima il $\cos N\widehat{B}C$ nota la sua tangente

$$\cos N\widehat{B}C = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 N\widehat{B}C}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{4}{5}$$

pertanto

$$NB = \frac{BC}{\cos N\widehat{B}C} = \frac{8}{\frac{4}{5}} = 10$$

inoltre

$$\frac{NC}{BC} = \tan N\widehat{B}C$$

da cui

$$NC = 8 \times \frac{3}{4} = 6$$

Consideriamo ora il tr. rettangolo MDN. Abbiamo $MD = 4$ e $ND = 8 - 6 = 2$. Pertanto per il th. di Pitagora abbiamo

$$MN = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

Il perimetro del triangolo MBN sarà

$$2p_{MBN} = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 10 = 2\left(5 + 3\sqrt{5}\right)$$

Un triangolo è rettangolo se vale l'inverso del th. Pitagora cioè se

$$MN^2 + MB^2 = NB^2 \quad 20 + 80 = 100$$

Il triangolo è quindi rettangolo e

$$\sin M\widehat{B}N = \frac{MN}{NB} = \frac{2\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Applicazioni dei teoremi sui triangoli rettangoli - Teorema della corda.

TEOREMA. *In una circonferenza il rapporto tra una corda e il seno di uno qualsiasi degli angoli alla circonferenza che insistono su quella corda è uguale al diametro della circonferenza.*

Se AB è una corda e α uno degli angoli alla circonferenza, allora

$$AB = 2r\sin\alpha$$

ESERCIZIO 138. In una circonferenza di raggio $15\,cm$, gli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda AB sono di ampiezza α tale che $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Trovare la lunghezza delle corda.

SOLUZIONE. Ricaviamo il seno dell'angolo α con la proprietà fondamentale

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{4}{5}$$

per cui

$$AB = 2r\sin\alpha = 30 \times \frac{4}{5} = 24\,cm$$

ESERCIZIO 139. In un triangolo ABC, inscritto in una circonferenza di raggio r, i due lati AB, AC sono rispettivamente $\frac{2}{3}r$ e $\frac{2}{3}r\sqrt{2}$ e l'angolo $A\widehat{B}C$ è ottuso. Determinare il terzo lato.

SOLUZIONE. Possiamo ricavare gli angoli alla circonferenza sottesi dalle corde

$$\sin\beta = \frac{AB}{2r} = \frac{\frac{2}{3}r}{2r} = \frac{1}{3}$$

e

$$\sin\gamma = \frac{AC}{2r} = \frac{\frac{2}{3}r\sqrt{2}}{2r} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

l'angolo $\alpha = \pi - (\beta+\gamma)$, per cui

$$\sin\alpha = \sin\left[\pi - (\beta+\gamma)\right] = \sin(\beta+\gamma)$$

ma $\cos\beta = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$ (è indicato infatti come un angolo ottuso) e $\cos\gamma = \frac{\sqrt{7}}{3}$ per cui

$$\sin\alpha = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{7}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{7}-4}{9}$$

la lunghezza del terzo lato, cioè della corda BC

$$BC = \frac{2r\left(\sqrt{7}-4\right)}{9}$$

Triangoli qualsiasi

Richiamiamo i teoremi relativi ai triangoli qualsiasi.

Teorema del coseno o di Carnot

TEOREMA. *In un triangolo qualsiasi il quadrato su un lato è uguale alla somma dei quadrati sugli altri due lati, diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo da essi compreso.*

$$\begin{array}{c} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos\gamma \end{array}$$

Questo teorema contiene il teorema di Pitagora perché il $\cos 90° = 0$. Se l'angolo è acuto il doppio prodotto è sottratto dalla somma dei due quadrati; se l'angolo è ottuso, il coseno è negativo e il doppio prodotto viene aggiunto

Teorema dei seni o di Eulero

Teorema. *In un triangolo qualsiasi i lati sono proporzionale ai seni degli angoli opposti, e quindi è costante il rapporto il rapporto tra ciascun lato e il seno dell'angolo ad esso opposto.*

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

Questo teorema può essere completato tramite il teorema della corda, affermando che *il rapporto costante è uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo.*

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

Esercizio 140. Risolvere il triangolo, essendo a,b,c le misure dei tre lati e α,β,γ l'ampiezza dei rispettivi angoli opposti, tale che

$$\begin{cases} a=2\left(\sqrt{3}-1\right) \\ b=\sqrt{6}-\sqrt{2} \\ \alpha=45° \end{cases}$$

Soluzione. Di questo triangolo conosciamo due lati e l'angolo opposto al lato di misura a. Ci sono quindi le condizioni per applicare il teorema dei seni

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\quad \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sin\beta}\quad \sin\beta=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{1}{2}$$

pertanto $\beta=\arcsin\frac{1}{2}=30°$ (l'angolo supplementare è escluso perché la somma dei tre angoli non può superare $180°$) e $\gamma=180°-(45°+30°)=105°$. Sempre con lo stesso teorema possiamo ricavare la misura del terzo lato

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

da cui

$$c=\frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin\left(60°+45°\right)}{\frac{1}{2}}$$

cioè

$$c=2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=2$$

Esercizio 141. Risolvere il triangolo, essendo a,b,c le misure dei tre lati e α,β,γ l'ampiezza dei rispettivi angoli opposti, tale che

$$\begin{cases} a=\sqrt{6}+\sqrt{2} \\ b=2\sqrt{2} \\ c=2\sqrt{3} \end{cases}$$

Soluzione. Di questo triangolo conosciamo tutti i lati. Ci sono quindi le condizioni per applicare il teorema di Carnot per ricavare gli angoli. Iniziamo dall'angolo α, opposto al lato a:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

sostituendo i valori assegnati

$$\cancel{8}+4\sqrt{3}=\cancel{8}+12-8\sqrt{6}\cos\alpha$$

da cui, dividendo anche tutto per 4

$$\sqrt{3}=3-2\sqrt{6}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

cioè

$$\alpha=\arccos\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=75°$$

analogamente per gli altri angoli

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$

$$\cancel{8}=\cancel{8}+4\sqrt{3}+12-4\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos\beta$$

$$\cos\beta=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

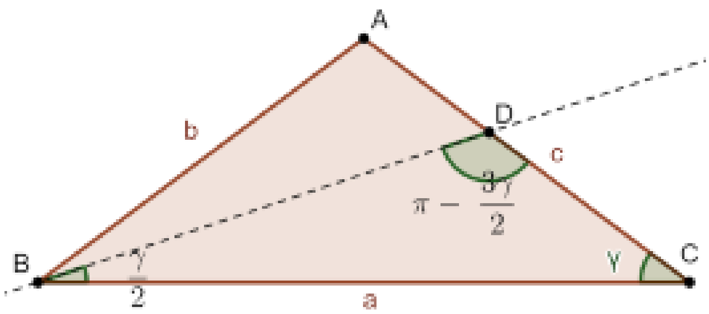
da cui
$$\beta = 45°$$
per la proprietà dei triangoli
$$\gamma = 180° - (75° + 45°) = 60°$$

Esercizio 142. Risolvere il triangolo, essendo a, b, c le misure dei tre lati e α, β, γ l'ampiezza dei rispettivi angoli opposti, tale che
$$\begin{cases} a = 6\sqrt{3} \\ \alpha = 60° \\ \beta = 45° \end{cases}$$

Soluzione. Di questo triangolo conosciamo un lato e due angoli, di cui α opposto al lato a. Ci sono quindi le condizioni per applicare il teorema dei seni:
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
sostituendo i valori assegnati
$$\frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
da cui,
$$b = 6\sqrt{2}$$
troviamo $\gamma = 180° - 105° = 75°$, per cui $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$
cioè
$$c = 3\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)$$

Esercizio 143. Di un triangolo isoscele sappiamo che, detti $\beta = \gamma$ gli angoli alla base, è $\cos\beta = \frac{4}{5}$. Dopo aver verificato che il triangolo è ottusangolo, calcolare le funzioni dell'angolo al vertice. Sapendo poi che $a = 10$, calcolare i lati $b = c$ e la lunghezza della bisettrice dell'angolo β.

Soluzione. Verifichiamo se il triangolo è ottusangolo calcolando il coseno dell'angolo al vertice che dovrà risultare, in caso affermativo, negativo
$$\cos\alpha = \cos(\pi - 2\beta) = -\cos 2\beta = 1 - 2\cos^2\beta = -\frac{7}{25}$$
e quindi
$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \frac{24}{25}$$
Troviamo ora i lati $b = c$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \frac{10}{\frac{24}{25}} = \frac{b}{\frac{3}{5}}$$
da cui
$$b = c = \frac{25}{4} = 6,25$$
per trovare la lunghezza bisettrice osserviamo la figura.



applichiamo il teorema dei seni per trovare il segmento BD

$$\frac{a}{\sin\left(\pi-\frac{3}{2}\gamma\right)}=\frac{BD}{\sin\gamma}$$

ma $\sin\left(\pi-\frac{3}{2}\gamma\right)=\sin\frac{3}{2}\gamma=\sin\left(\gamma+\frac{1}{2}\gamma\right)$

$$=\sin\gamma\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\gamma\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{3}{5}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}\right)+\frac{4}{5}\left(\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}\right)=$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{13}{5\sqrt{10}}=\frac{13\sqrt{10}}{50}$$

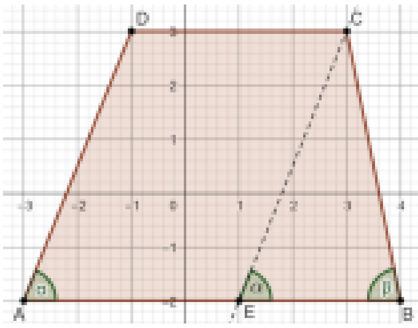
da cui

$$\frac{10}{\frac{13\sqrt{10}}{50}}=\frac{BD}{\frac{3}{5}}$$

e

$$BD=\frac{300}{13\sqrt{10}}=\frac{30\sqrt{10}}{13}$$

Esercizio 144. In un trapezio i lati non paralleli misurano 13 e 14, mentre le basi misurano 20 e 35. Calcolare i coseni degli angoli acuti del trapezio.



Soluzione. Siano $AB=35$, $CD=20$, $BC=13$ e $AD=14$. Come in figura, tracciamo dal vertice C la parallela al lato obliquo AD, pertanto $CE=AD$ e $EB=AB-AE=15$. Applichiamo il teorema di Carnot al triangolo BEC, di cui conosciamo i tre lati

$$CE^2=EB^2+BC^2-2EC\cdot BC\cos\beta$$

Sostituendo i valori dati

$$196=225+169-2\times15\times13\cos\beta$$

da cui

$$\cos\beta=\frac{198}{390}=\frac{33}{65}$$

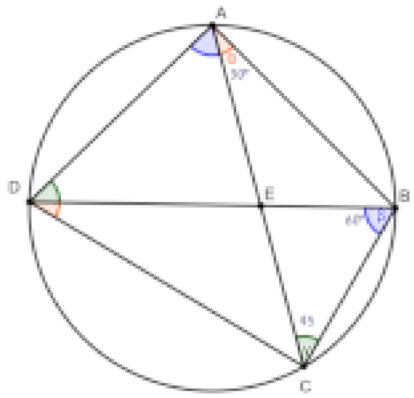
analogamente per il $\cos\alpha$.

$$169=225+196-2\times15\times14\cos\alpha$$

da cui

$$\cos\alpha=\frac{252}{520}=\frac{3}{5}$$

Esercizio 145. In una circonferenza di raggio r si conducono tre corde consecutive $AB=r\sqrt{2}$, $BC=r$ e $CD=r\sqrt{3}$. Determinare il perimetro del quadrilatero $ABCD$ e le lunghezze delle due diagonali AC e BD.



Soluzione. Sappiamo che AB è il lato del quadrato inscritto, BC è il lato dell'esagono inscritto e CD è il lato del triangolo equilatero inscritto. Pertanto possiamo ottenere immediatamente i rispettivi angoli al centro $90°, 60°, 120°$. Sappiamo inoltre che gli angoli alla circonferenza sono la metà degli angoli al centro, per cui

$$\gamma = 45° \quad \alpha = 30° \quad \beta = 60°$$

Per trovare il perimetro dobbiamo calcolare la lunghezza del lato AD; lo faremo attraverso il triangolo DAC. L'angolo $D\widehat{C}A = 45°$ per cui $AD = AB = r\sqrt{2}$

Il perimetro sarà

$$2p = r + 2r\sqrt{2} + r\sqrt{3} = r\left(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$$

troviamo le diagonali col th. dei seni, sapendo che $\sin(45° + 30°) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

$$\frac{AC}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

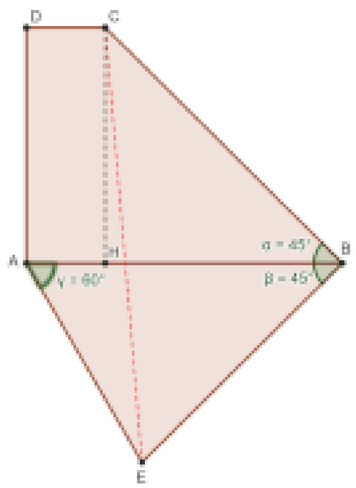
$$AC = 2r \times \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} r$$

e il triangolo ABD è rettangolo isoscele essendo $\widehat{A} = 90°$

$$BD = 2r$$

cioè il diametro della circonferenza.

Esercizio 146. Sono dati un trapezio rettangolo $ABCD$ e un triangolo ABE esterno al trapezio. Si sa che la base maggiore $AB = 4a$, la base minore $CD = a$, l'angolo $A\widehat{B}C$ adiacente alla base maggiore di $45°$. Del triangolo ABE si conoscono gli angoli $A\widehat{B}E = 45°$ e $B\widehat{A}E = 60°$. Determinare gli elementi incogniti del trapezio e del triangolo, l'area del pentagono e la diagonale CE.



Soluzione. Consideriamo dapprima il trapezio. Se tracciamo l'altezza CH, possiamo vedere che il triangolo BHC è rettangolo isoscele (metà di un quadrato) per cui $AD = CH = 4a - a = 3a$ e $CB = 3a\sqrt{2}$. L'angolo ottuso $B\widehat{C}D = 135°$, perché la somma degli angoli interni è pari a $360°$. Analizziamo ora il triangolo AEB. Avrà $AB = 4a$; troviamo gli altri lati con il th. dei seni

$$\frac{AB}{\sin 75°} = \frac{AE}{\sin 45°}$$

cioè

$$AE = 4a\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = 4a \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 4a\left(\sqrt{3}-1\right)$$

e per l'altro lato

$$\frac{AB}{\sin 75°} = \frac{BE}{\sin 60°}$$

cioè

$$BE = 4a\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = 4a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2a\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Troviamo ora l'area del pentagono come somma delle due aree. Area del trapezio:

$$A_{trp} = \frac{(AB+CD)\cdot CH}{2} = \frac{15}{2}a^2$$

e l'area del triangolo

$$A_{AEB} = \frac{1}{2}AE\cdot AB\sin 60° = \frac{1}{2}\times 4a\left(\sqrt{3}-1\right)\times 4a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4a^2\left(3-\sqrt{3}\right)$$

sommiamo le due aree

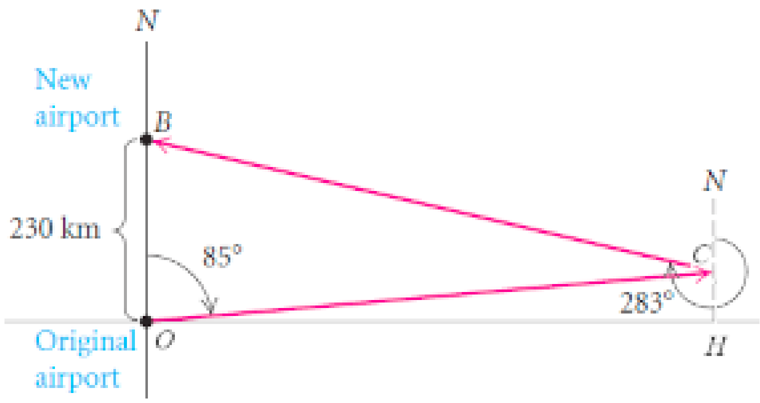
$$A_{pent} = \frac{15}{2} + 12 - 4\sqrt{3} = \frac{39-8\sqrt{3}}{2}a^2$$

Per trovare la diagonale CE, osserviamo che il triangolo EBC è rettangolo, quindi, ricordando che il th. di Carnot si riduce a quello di Pitagora per tr. rettangoli,

$$EC = \sqrt{EB^2+BC^2} = \sqrt{\left[2a\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)\right]^2 + \left(3a\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{24a^2\left(4-2\sqrt{3}\right)+18a^2} = \sqrt{114a^2-48a^2\sqrt{3}} = a\sqrt{6\left(19-8\sqrt{3}\right)}$$

Esercizio 147. Un areo da ricognizione decolla da suo aeroporto verso est e vole in una direzione di $85°$. A causa del cattivo tempo, atterra in un altro aeroporto a $230\,km$ a nord della sua base. Per ritornare al nuovo aeroporto, vola in una direzione di $283°$. Trovare la distanza totale percorsa dall'aereo.



Soluzione. Proiettiamo il punto di inversione sull'asse orizzontale e avremo un triangolo rettangolo, i cui angoli saranno $H\widehat{O}C = 5°$ e $O\widehat{C}H = 85°$; pertanto l'angolo $O\widehat{C}B = 283° - 265° = 18°$

$$\frac{BC}{\sin 85°} = \frac{OB}{\sin 18°}$$

cioè

$$BC = 230 \times \frac{\sin 85°}{\sin 18°} = 741\,km$$

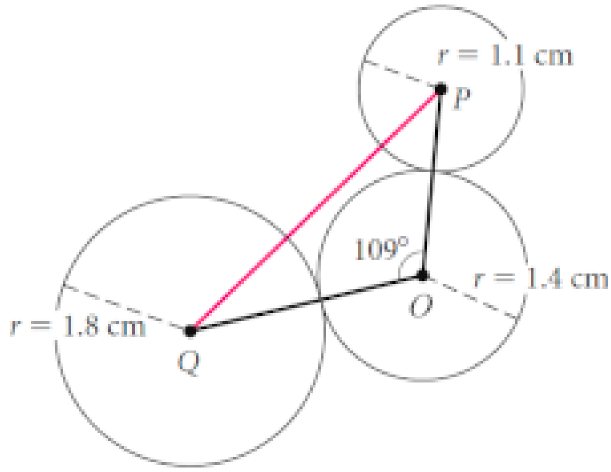
e per l'altro lato

$$OC = 230 \times \frac{\sin 77°}{\sin 18°} = 725\,km$$

la distanza totale sarà

$$BC + OC = 741 + 725 = 1466\,km$$

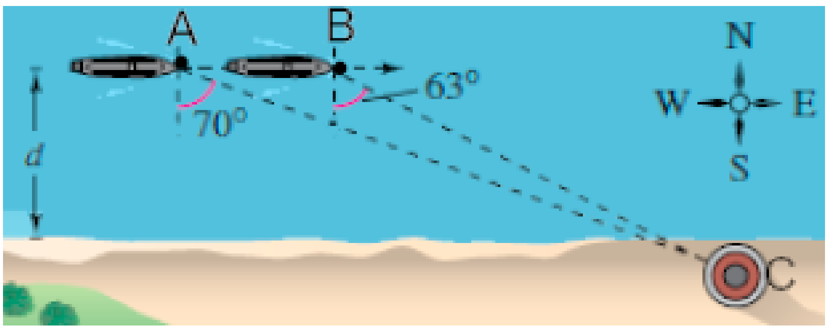
Esercizio 148. Tre cerchi sono disposti come mostrato in figura. Trovare la lunghezza di PQ.



Soluzione. Nei cerchi tangenti la distanza tra i loro centri è uguale alla somma dei loro raggi, per cui $QO = 3,2\,cm$ e $OP = 2,5\,cm$. Applichiamo il th. di Carnot

$$PQ = \sqrt{OQ^2 + OP^2 - 2OQ \cdot OP \cdot \cos 109°} = 4,7\,cm$$

Esercizio 149. Una barca sta viaggiando parallela alla costa verso est alla velocità di 16 km/h. In un dato momento, il rilevamento verso un faro è S 70° E, e 15 minuti dopo il rilevamento è S 63° E (vedi figura). Il faro si trova sul litorale. Trovare la distanza d tra la barca e la costa.



Soluzione. Se la barca viaggia alla velocità costante indicata, in 15 minuti, cioè 1/4 di ora, percorrerà

$$s = vt = AB = 16\,\frac{km}{h} \times \frac{1}{4}\text{h} = 4\,km$$

Consideriamo il triangolo ABC, rettangolo in B. L'angolo $C\widehat{A}B = 90 - 70 = 20°$ e l'angolo $A\widehat{B}C = 90 + 63 = 153°$, pertanto l'angolo $A\widehat{C}B = 180 - (20 + 153) = 7°$. Possiamo ora calcolare la lunghezza del lato AC:

$$\frac{AB}{\sin A\widehat{C}B} = \frac{AC}{\sin A\widehat{B}C}$$

cioè

$$AC = \frac{\sin 153°}{\sin 7°} \times 4 = 15\,km$$

Ora la distanza d è data da

$$d = AC \cos 70° = 15 \times \cos 70° = 5,1\,km$$

Applicazioni alla Fisica.

Esercizio 150. Due punti materiali percorrono di moto uniforme due semirette formanti un angolo di $43°20'10"$; essi hanno rispettivamente le velocità di $8\,\frac{cm}{s}$ e $6\,\frac{cm}{s}$. Calcolare la distanza tra i due punti dopo che sono trascorsi $4\,s$ dall'istante della loro partenza dal vertice dell'angolo.

Soluzione. La legge oraria del moto rettilineo uniforme è del tipo $s = s_0 + vt$; nel nostro caso possiamo porre $s_0 = 0$.

$$s_1 = 8\,\frac{cm}{s} \times 4\,s = 32\,cm$$
$$s_2 = 6\,\frac{cm}{s} \times 4\,s = 24\,cm$$

Per trovare la distanza che li separa applichiamo il teorema di Carnot conoscendo i due lati e l'angolo compreso tra di essi (ovviamente in questo caso faremo uso della calcolatrice)

$$d = s_1 - s_2 = \sqrt{32^2 + 24^2 - 2 \times 32 \times 24 \times \cos\left(43°20'10"\right)} = 22\,cm$$

Esercizio 151. In un piano inclinato l'inclinazione è di $36°28'40"$. Calcolare la forza che si deve applicare, parallelamente alla direzione del piano inclinato, ad un corpo del peso di $40\,kg$ appoggiato al piano stesso per ottenere l'equilibrio, trascurando la resistenza di attrito.

Soluzione. Nel piano inclinato, trascurando l'attrito, agisce la sola forza peso. Tale forza può essere scomposta nelle sue componenti lungo la direzione del piano inclinato, detta $P_{//}$ e perpendicolare ad esso $P_{\perp}$. La componente parallela è data da $P_{//} = P\sin\theta$, per cui

$$P_{//} = 40 \times \sin\left(36°28'40"\right) = 24\,kg$$